

Міністерство освіти і науки України
Державний заклад
«Луганський національний університет імені Тараса Шевченка»

Навчально-науковий інститут математики та інформаційних технологій

Кафедра математики та інформатики

Лазарєв Андрій Вікторович

ВЛАСТИВОСТІ СИМЕТРИЧНИХ 0-КАТЕГОРІЙ

кваліфікаційна робота

здобувача вищої освіти другого (магістерського) рівня

освітньої програми «Алгебра та теорія чисел»

за спеціальністю 111 Математика

Особистий підпис _



Андрій ЛАЗАРЄВ

Науковий керівник ____



Валерій ХМЕЛЬ,

кандидат педагогічних наук, доцент
кафедри математики та інформатики

В.о. завідувача кафедри _____

Юрій КОЗУБ,

доктор технічних наук, професор
кафедри математики та інформатики

Лубни – 2026

ЗМІСТ

| | |
|---|----|
| ВСТУП. | 3 |
| РОЗДІЛ 1. ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА КАТЕГОРІЙ | 5 |
| 1.1. Поняття категорії | 5 |
| 1.2. Інше визначення категорії | 10 |
| 1.3. Функтори і конкретні категорії | 11 |
| РОЗДІЛ 2. НАПІВРЕТРАКЦІЇ СИМЕТРИЧНИХ 0-КАТЕГОРІЙ | 17 |
| 2.1. Загальні поняття базисних систем | 17 |
| 2.2. Поняття напівретракції алгебраїчних систем | 20 |
| 2.3. Поняття 0-категорії. Напівретракції симетричної 0-категорії | 27 |
| РОЗДІЛ 3. ЗРІЗИ ВІДНОШЕНЬ ГРІНА НА СИМЕТРИЧНІЙ ІНВЕРСНІЙ 0-КАТЕГОРІЇ | 32 |
| 3.1. Загальні положення | 32 |
| 3.2. Опис R-зрізів напівгрупи IC_X | 37 |
| 3.3. Опис J- и H - зрізів IC_X | 41 |
| 3.4. Класифікація зрізів з точністю до ізоморфізму | 44 |
| ВИСНОВКИ | 48 |
| СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ | 50 |

ВСТУП

Теорія категорій – розділ математики, що вивчає властивості відношень між математичними структурами, незалежно від внутрішньої будови структур; абстрагується від множин і функцій до діаграм.

Деякі математики вважають теорію категорій занадто абстрактною і непридатною для практичного застосування. У той же час, теорія категорій займає центральне місце в сучасній математиці, вона також знайшла застосування в інформатиці і в теоретичній фізиці. Це вказує на актуальність розглянутої в дипломній роботі теми.

Поняття категорія було введено в 1945 році. Своїм походженням і первинними стимулами розвитку теорія категорій зобов'язана алгебраїчній топології. Подальші дослідження виявили об'єднуючу й уніфікуючу роль поняття категорія і пов'язаного з ним поняття функтора для багатьох розділів математики.

Інтенсивний розвиток універсальної алгебри і аксіоматична побудова теорії гомотопій поклали початок різним напрямам досліджень: категорного вивчення різноманіття універсальної алгебри, теорії ізоморфізмів прямих розкладань, теорії пов'язаних функторів і теорії двоїстості функторів.

Подальший розвиток виявив істотний взаємозв'язок між цими дослідженнями.

Завдяки виникненню теорії відносних категорій, широко використовується техніка пов'язаних функторів і замкнутих категорій, була встановлена подвійність між теорією гомотопій і теорією універсальних алгебр, заснована на інтерпретації категорних визначень моноїда і комоноїда у відповідних функторів.

Інший спосіб введення додаткових структур в категоріях пов'язаний із завданням в категоріях топології і побудові категорії пучків над топологічною категорією – так які називаються топоси.

Метою написання магістерської роботи є вивчення властивостей симетричних 0-категорій.

Основні задачі дослідження:

- розглянути поняття категорії;
- дослідити напівретракції деяких алгебраїчних систем;
- зробити огляд результатів про симетричні 0-категорії, зокрема, навести опис напівретракцій та зрізів відношень Гріна на симетричній інверсній 0-категорії.

Предметом дослідження являються категорії.

Об'єктом досліджень є симетричні 0-категорії.

Методи дослідження — методи загальної алгебри та методи теорії категорій.

Теоретичне та практичне значення одержаних результатів.

Результати досліджень можуть бути застосовані до вивчення будови різних категорій, а також для викладання спецкурсів з теорії категорій на механіко-математичних факультетах університетів.

Структура й обсяг роботи. Робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків та списку використаних джерел. Загальний обсяг роботи складає 52 сторінки. Список використаних джерел містить 34 найменування.

РОЗДІЛ 1. ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА КАТЕГОРІЙ

1.1. Поняття категорії

Розглянемо поняття категорії.

Категорії – це деякі математичні структури, окремими випадками яких є частково впорядковані множини, а також напівгрупи з одиницею (в тому числі групи).

У багатьох випадках категорію зручно представляти як «узагальнену частково впорядковану множину», в інших випадках як «узагальнену напівгрупу з одиницею» [32].

Означення 1.1. Категорія K задається наступним набором даних:

1. Сукупністю об'єктів, які ми будемо позначати великими латинськими літерами A, B, C, \dots

2. Сукупністю морфізму, або стрілок, які ми будемо позначати малими латинськими буквами f, g, h, \dots

3. Операціями dom і cod , які зіставляють кожною стрілкою f деякі об'єкти $dom(f)$ і $cod(f)$ (Вони називаються початком і кінцем f).

Той факт, що $dom(f) = A$ і $cod(f) = B$, наочно зображується так:

$$f: A \rightarrow B \text{ або } A \xrightarrow{f} B. \quad (1.1)$$

У цьому випадку говорять, що f - стрілка (або морфізм) з A до B .

4. Операцією композиції, яка по кожній парі стрілок f і g , розташованих наступним чином:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C. \quad (1.2)$$

(тобто, $cod(f) = dom(g)$), визначається деяка стрілка:

$$A \xrightarrow{g \circ f} C. \quad (1.3)$$

5. Операцією i_A , яка по кожному об'єкту A визначає деяку стрілку (вона називається тотожною або одиничною стрілкою об'єкта A , а також тотожним або одиничним морфізмом об'єкта A).

При цьому повинні виконуватися наступні умови:

1. Асоціативність композиції.

Для будь-якої трійки стрілок f, g, h , розташованих так:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D. \quad (1.4)$$

виконано рівність $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

2. Властивості тотожності.

Для будь-якої стрілки $f : A \rightarrow B$ виконано рівність $f \circ i_A = f$.

Для будь-якої стрілки $f : A \rightarrow B$ виконано рівність $i_B \circ f = f$.

Приклад 1.1. Категорія множин Set . Її об'єктами є довільна множина A, B, C, \dots , а морфізмами - впорядковані трійки виду (A, f, B) , де f - функція з A до B .

Операції dom і cod задаються рівностями:

$$\text{dom}(A, f, B) = A,$$

$$\text{cod}(A, f, B) = B.$$

Тотожний морфізм i_A є за визначенням (A, i_A, A) , де i_A - тотожна функція з A в A .

Композицією морфізма (B, g, C) і (A, f, B) буде морфізм $(A, g \circ f, C)$. В принципі, можна було б визначити морфізм як пари (f, B) , оскільки початок однозначно знаходиться по f (це область визначення функції f). Але кінець треба вказувати явно, так як по f він однозначно не знаходиться (множина значень f може бути строго менше B) [24].

Наприклад, функцію, визначену на множині дійсних чисел і тотожно рівну нулю, можна вважати діючою на множині натуральних чисел, раціональних чисел або дійсних чисел.

Сукупність усіх об'єктів категорії K будемо позначати $\text{Ob}(K)$. Сукупність усіх стрілок категорії K будемо позначати $\text{Mor}(K)$.

Сукупність усіх стрілок з A в B в категорії K будемо позначати $K(A, B)$.

Зауваження 1.1. Часто замість $K(A, B)$ пишуть $\text{Hom}_K(A, B)$. З теоретико-множинної точки зору сукупність об'єктів Set (тобто, сукупність

всіх множин) не є великою, вона занадто велика. Те саме можна сказати і до сукупності морфізма Set .

Означення 1.2. Категорія K називається *локально малою*, якщо $K(A, B)$ є множиною для будь-яких A і B .

Означення 1.3. Категорія K називається *малою*, якщо $\text{Mog}(K)$ (тобто, об'єднання всіх $K(A, B)$) є множиною. Будь-яка мала категорія є локально малою.

Наприклад зворотне є невірним. Set є локально малою, але не є малою [22].

Сукупність об'єктів $O_b(K)$ малої категорії теж є множиною, оскільки об'єктів «не більше», ніж морфізмів.

Справді, кожному об'єкту A відповідає його одиничний морфізм id_A , причому різним об'єктам відповідають різні поодинокі морфізми ($zid_A = id_B$ впливає $dom(id_A) = dom(id_B)$, тому $A = B$).

Зауваження 1.2. Категорії доводиться ділити на «великі» і «малі» з технічних причин, щоб уникнути парадоксів, близьких до парадоксу Кантора з теорії множин.

Означення 1.4. Напівгрупа з одиницею – це множина M (будемо позначати її елементи f, g, h, \dots), на якій задана бінарна операція множення $g \circ f$ і виділений елемент e (двобічна одиниця), причому для будь-яких елементів f, g, h виконані рівності:

1. Асоціативність множення:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f). \quad (1.5)$$

2. Властивості двосторонньої одиниці.

$$f \circ e = f; e \circ f = f.$$

Приклади напівгруп з одиницею:

- 1) будь-яка група;
- 2) множина натуральних чисел з операцією множення;
- 3) множина натуральних чисел з операцією додавання (двобічною одиницею буде 0);

4) множина слів в деякому алфавіті з операцією приписування (двобічною одиницею буде пусте слово) [28,29].

Будь-яка мала категорія K з єдиним об'єктом (позначимо його A) задає деяку напівгрупу з одиницею. Елементами цієї напівгрупи будуть стрілки категорії (тобто, множина M – це $\text{Mor}(K)$). Будь-яка стрілка $f \in K(A, A)$, тому існує композиція будь-яких двох стрілок, операція композиції асоціативна і існує двобічна одиниця id_A .

Навпаки, будь-яку напівгрупу з одиницею можна перетворити в малу категорію з єдиним об'єктом (треба вибрати довільний об'єкт A і покласти $\text{dom}(f) = \text{cod}(f) = A$ для всіх елементів напівгрупи).

Означення 1.5. Множина M називається *впорядкованою*, якщо на ній задане рефлексивне транзитивне відношення (відношення передупорядкованості). Це означає, що для будь-яких елементів множини (будемо їх позначати A, B, C, \dots) виконані наступні умови:

- 1) рефлексивність $A \leq A$;
- 2) транзитивність $AB \leq$ і $BC \leq$ тягне $AC \leq$.

Якщо виконано також властивість антисиметричності:

$$AB \leq \text{ і } BA \leq \text{ тягне } A=B, \quad (1.6)$$

то множина називається *частково упорядкованою*, а відношення частковим порядком і позначається \leq .

Означення 1.6. Категорія K називається *категорією передпорядку*, якщо $K(A, B)$ містить не більше однієї стрілки для будь-яких A і B .

Іншими словами, якщо у двох стрілок однаковий початок і однаковий кінець, то ці стрілки рівні [26].

Приклад 1.2. Будь-яка мала категорія передпорядку задає деяку передвпорядковану множину. Її елементами будуть об'єкти категорії (тобто, множина M – це $O_b(K)$), а відношення передпорядку задається умовою:

$$A \leq B \text{ якщо і тільки якщо існує стрілка з } A \text{ в } B. \quad (1.7)$$

Рефлексивність \leq впливає з наявності тотожних стрілок $i_d A$, а транзитивність - з наявності композиції стрілок.

Навпаки, будь-яку перед впорядковану множину можна перетворити в малу категорію. Її об'єктами будуть елементи цієї множини, треба всього лише для будь-яких об'єктів з властивістю $A \leq B$ довільним чином вибрати єдину стрілку з A в B .

Наприклад, можна вважати стрілкою саму впорядковану пару (A, B) . У цьому випадку буде:

$$i_d A = (A, A), (B, C) \circ (A, B) = (A, C) \quad (1.8)$$

Незалежно від конкретного вибору стрілок, вірні асоціативність композиції і властивості тотожності, оскільки будь-які дві стрілки з однаковим початком і однаковим кінцем рівні.

Наприклад, якщо $f: A \rightarrow B$, то $f \circ i_d A: A \rightarrow B$, тому $f \circ i_d A = f$.

Означення 1.7. Стрілка $f: A \rightarrow B$ називається *ізоморфізмом*, якщо існує стрілка $g: B \rightarrow A$ з властивостями:

$$\begin{aligned} g \circ f &= i_d A, \\ f \circ g &= i_d B. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Така стрілка g називається *оберненою* до f .

Зворотня стрілка може бути тільки одна. Припустивши, що до f є дві протилежні стрілки g_1 і g_2 , ми отримаємо:

$$\begin{aligned} g_1 \circ f \circ g_2 &= i_d A \circ g_2 = g_2, \\ g_1 \circ f \circ g_2 &= g_1 \circ i_d B = g_1 \text{ тому } g_1 = g_2. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Зворотню стрілку до f , якщо вона існує, будемо позначати f^{-1} .

Об'єкти A і B називаються *ізоморфними*, якщо між ними є ізоморфізм. Це позначається $A \cong B$ [23].

Композиція двох ізоморфізмів є ізоморфізмом. Тотожні стрілки є ізоморфізмами. Стрілка, обернена до ізоморфізму, є ізоморфізмом.

Для будь-яких A і B :

$$1) A \cong A;$$

2) $A \cong B$ тягне $B \cong A$;

3) $A \cong B$ і $B \cong C$ тягне $A \cong C$.

Приклад 1.3. У Set дві множини A і B ізоморфні \Leftrightarrow вони рівнопотужні.

Приклад 1.4. Мала категорія з одним об'єктом задає групу \Leftrightarrow , тобто всі її стрілки є ізоморфізмом (іншими словами, обернені).

Мала категорія передпорядку задає частковий порядок \Leftrightarrow ізоморфні об'єкти рівні.

Дійсно, об'єкти A і B в категорії передпорядку ізоморфні тоді і тільки тоді, коли існують стрілки $f:A \rightarrow B$ і $g:B \rightarrow A$, тобто $A \leq B$ і $B \leq A$ (рівності $g \circ f = id_A$ і $f \circ g = id_B$ виконуються автоматично, оскільки будь-які дві стрілки з однаковим початком і однаковим кінцем рівні).

1.2. Інше визначення категорії

Означення 1.1 є стандартним, але насправді зазвичай користуються трохи іншим.

Означення 1.8. На практиці категорія зазвичай задається наступним набором даних:

1) сукупністю об'єктів, які ми будемо позначати великими латинськими літерами A, B, C, \dots ;

2) сукупністю протоморфізмів, або протострілок, які ми будемо позначати готичними літерами f, g, h, \dots ;

3) тримісним відношенням $A \rightarrow B$ (або $A \xrightarrow{f} B$), яке означає « f , можна вважати стрілкою з A в B ».

За протоморфізмом його початок і кінець не зобов'язані визначатися однозначно, в цьому різниця.

4) Операцією композиції, яка по кожній парі протострілок f і g , розташованих так:

$$f \rightarrow A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{h} C, \quad (1.11)$$

називається така операція, якщо виконано рівність $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

Для будь-якої протострілки $f:A \rightarrow B$ виконано рівність:

$$f \circ i_d A = F. \quad (1.12)$$

Для будь-якої протострілки $f: A \rightarrow B$ виконано рівність:

$$i_d B \circ f = f. \quad (1.13)$$

Підкреслюємо, що єдина відмінність від означення 1.1 в тому, що по протоморфізму його початок і кінець не зобов'язані визначатися однозначно.

Маючи такий набір даних, ми можемо побудувати категорію в сенсі означення 1.1.

Як морфізми з A в B беруться впорядковані трійки (A, F, B) , для яких наступна вірність є справедливою $f: A \rightarrow B$.

При цьому:

$$\begin{aligned} \text{dom}(A, F, B) &= A, \\ \text{cod}(A, F, B) &= B, \\ \text{id} A &= (A, \text{id} A, A). \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$(B, G, C) \circ (A, F, B) = (A, g \circ f, C).$$

Саме так будується категорія Set , протоморфізмами в цьому випадку були теоретико-множинні функції [27].

Слово «протоморфізм» і означення 1.8 взяті з книги Freyd, Scedrov «Categories, Allegories».

1.3. Функтори і конкретні категорії

Функтори – це правильні відображення категорій один в одного. Прикладами функторів є монотонні відображення впорядкованих множин, а також гомоморфізми напівгруп з одиницею (в тому числі гомоморфізм груп).

Означення 1.9. Функтор F з категорії K_1 в категорію K_2 - це пара відображень (позначаються однією літерою):

$$\begin{aligned} F &: \text{Ob}(K_1) \rightarrow \text{Ob}(K_2), \\ F &: \text{Mor}(K_1) \rightarrow \text{Mor}(K_2), \end{aligned} \quad (1.15)$$

перше з яких відображає об'єкти K_1 в об'єкти K_2 , а друге – морфізм K_1 в морфізм K_2 , причому зберігаються dom , cod , id і композиція.

Це означає, що для будь-яких f, g, A, B, C з категорії K_1 виконано:

- 1) $f:A \rightarrow B$ тягне $F(f):F(A) \rightarrow F(B)$;
- 2) $F(id_A) = id_{F(A)}$;
- 3) $A \xrightarrow{f} B$ і $B \xrightarrow{g} C$ тягне $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Функтори будемо позначати буквами F, G, H . Якщо функтор F діє з категорії K_1 в категорію K_2 , будемо це записувати як $F : K_1 \rightarrow K_2$ або $K_1 \xrightarrow{F} K_2$.

Якщо K_1 і K_2 – малі категорії з одним об'єктом кожна, то функтори між ними взаємно однозначно відповідають гомоморфізмам відповідних напівгруп з одиницею.

Функтор $F: K_1 \rightarrow K_2$ переводить єдиний об'єкт K_1 в єдиний об'єкт K_2 , зберігає композицію стрілок і двосторонню одиницю. Таким чином, відображення $F: \text{Mor}(K_1) \rightarrow \text{Mor}(K_2)$ є гомоморфізмом напівгруп з одиницею.

Якщо K_1 і K_2 – малі категорії передпорядку, то функтори між ними взаємно однозначно відповідають монотонним відображенням відповідних передпорядків.

Якщо $A \leq B$, то $F(A) \leq F(B)$, оскільки єдина стрілка з A в B переходить в єдину стрілку з $F(A)$ в $F(B)$.

Навпаки, будь-яке монотонне відображення $O_b(K_1)$ в $O_b(K_2)$ перетворюється в функтор єдино можливим способом [30].

Означення 1.10. Кожній категорії K зіставляється *тотожний функтор* $I_d K: K \rightarrow K$, діючий так:

$$I_d K (A) = A, I_d K (f) = f, \quad (1.16)$$

для будь-яких A і f категорії K .

Означення 1.11. Кожній парі функторів F і G , розташованих так:

$$K_1 \xrightarrow{F} K_2 \xrightarrow{G} K_3, \quad (1.17)$$

Ставиться у відповідність їх композиція $G \circ F : K_1 \rightarrow K_3$, яка визначається рівністю:

$$(G \circ F) (A) = G(F(A)) \quad (G \circ F) (f) = G(F(f)), \quad (1.18)$$

для будь-яких A і f категорії K_1 .

Означення 1.12. Категорія малих категорій Cat має в якості об'єктів малі категорії, а в якості протоморфізмів - функтори.

Зауваження 1.3. Морфізмом будуть впорядковані трійки (K_1, F, K_2) , де $F : K_1 \rightarrow K_2$.

Тут ситуація приблизно така, як при побудові категорії Set - по функторам (тобто, парі відображень) відновити категорії K_1 і K_2 в загальному випадку не можна, тому їх треба вказувати явно.

Спроба утворити категорію всіх категорій (не тільки малих) призводить до парадоксу, близького до парадоксу Кантора.

Функтор $F : K_1 \rightarrow K_2$ називається *ізоморфізмом категорій*, якщо до нього існує (однозначно визначений) зворотний функтор $F^{-1} : K_2 \rightarrow K_1$ такий, що:

$$F \circ F^{-1} = Id_{K_2}, \quad (1.19)$$

$$F^{-1} \circ F = Id_{K_1}. \quad (1.20)$$

В цьому випадку категорії K_1 і K_2 називаються *ізоморфними* (пишеться $K_1 \cong K_2$).

Для малих категорій це визначення дає в точності ізоморфізм в категорії Cat .

Часто зустрічаються «категорії множин з деякою додатковою структурою». Наприклад, об'єктами категорії $G_{\text{гр}}$ є довільні групи, а протоморфізмами - гомоморфізм груп. Точно так само можна розглядати категорію лінійних просторів і лінійних відображень, категорію топологічних просторів і безперервних відображень і т.д. Не обов'язково брати такі великі категорії.

Можна взяти декілька (яких завгодно) топологічних просторів і їх безперервні відображення один в одного, то це й буде категорія.

Не обов'язково брати і все відображення. Якщо взяти тільки сюр'єктивні або тільки ін'єкційні відображення, все одно вийде категорія, оскільки композиція сюр'єктивних (ін'єкційних) відображень теж сюр'єктивна (ін'єкційна) і всі тотожні відображення сюр'єктивні (ін'єкційні).

Загальним для всіх таких категорій є наявність «хорошого» функтора в категорії множин Set [25].

Цей функтор по будь-якому об'єкту (групи, лінійного простору, топологічного простору і т.д.) визначає його множину-носіїв.

Означення 1.13. Функтор $G: K_1 \rightarrow K_2$ називається строгим (англійською пишуть faithful), якщо для будь-яких A, B, f, g з категорії K_1 виконується твердження:

$$f : A \rightarrow B \wedge g : A \rightarrow B \wedge G(f) = G(g) \text{ тягне } f = g. \quad (1.21)$$

Іншими словами, G відображає $K_1(A, B)$ в $K_2(G(A), G(B))$ ін'єкційно для будь-яких $A, B \in \text{Ob}(K_1)$.

Змістовно, строгість означає, що стрілка f визначена однозначно, якщо ми знаємо $\text{dom}(f)$, $\text{cod}(f)$ і $G(f)$.

Означення 1.14. Конкретна категорія задається наступним набором даних:

- 1) категорія K ;
- 2) строгий функтор $G: K \rightarrow \text{Set}$, цей функтор називається *стираючим* або *забуваючим* функтором [33].

Зауважимо, що при нашому визначенні конкретна категорія - це не категорія, а пара «категорія і функтом».

Всі перераховані вище категорії «множини з додатковою структурою» є конкретними, якщо в якості функторів брати функтори «множини-носія».

Розглянемо докладніше категорію Grp .

Будь-якій групі Gr відповідає її множина-носіїв $G(Gr)$.

Гомоморфізм груп задається як відображення множин-носіїв, що зберігають додаткову структуру (множення і двосторонню одиницю).

Гомоморфізм повністю визначений, якщо відомо відповідне відображення множин-носіїв, з цього випливає строгість G .

Композиція гомоморфізмів визначається як композиція відповідних відображень множин-носіїв, тому G є функтором.

Теорема 1.1. Для будь-якої малої категорії K існує строгий функтор $G: K \rightarrow \text{Set}$.

Доведення. Визначимо функтор G наступними рівностями:

$$G(A) = \{f \in \text{Mor}(K) : \text{cod}(f) = A\} \quad G(g)(f) = g \circ f.$$

Таким чином, кожному об'єкту A зіставляється множина $G(A)$ всіх стрілок з кінцем A .

Кожній стрілці $g : A \rightarrow B$ ставиться у відповідність функція $G(g): G(A) \rightarrow G(B)$, яка з будь-якого елементу $f \in G(A)$ визначає $g \circ f \in G(B)$.

Стрілка g однозначно визначається по A і $G(g)$, оскільки $g = G(g)(\text{id}_A)$, з цього випливає строгість G .

В окремому випадку, коли категорія K задає групу (тобто в K один об'єкт і всі стрілки є ізоморфізмом), ми отримуємо відому теорему Келі: будь-яка група може бути представлена як група підстановок деякої множини, а саме, множини її елементів.

Зауваження 1.4. Локально малу категорію не завжди можна зробити конкретною (вибравши відповідний функтор в Set). Але найпростіший природний контрприклад містить слово «гомотопія».

Різні твердження про категорії зручно представляти за допомогою картинок певного виду, званих діаграмами.

Означення 1.15. Діаграма в категорії K – це *орієнтований граф*, вершини якого зіставлені з деякими об'єктами K , а ребра – з деякими морфізмами K .

Діаграма називається *комутативною*, якщо для будь-яких вершин A і B в діаграмі будь-які два шляхи дають рівні композиції стрілок.

Якщо якась стрілка в діаграмі виділена пунктиром, це означає «ця стрілка – єдина, яка робить діаграму комутативною, перебуваючи в зазначеному положенні».

Приклад зображення діаграми представлений на рис. 1.1.

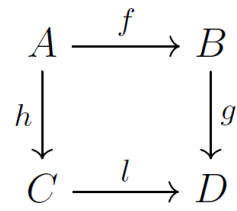


Рис.1.1. Приклад зображення діаграми

РОЗДІЛ 2. НАПІВРЕТРАКЦІЇ СИМЕТРИЧНИХ 0-КАТЕГОРІЙ

2.1. Загальні поняття базисних систем

Позначимо через F алгебраїчно замкнуте поле, через $M_{n \times 1}$ – простір матриць F розміру $n \times 1$. Для $w \in M_{n \times n}$ символ $\text{diag}(w)$ позначає блочну матрицю, уздовж діагоналі якої стоїть матриця w , а інші елементи нульові, розмір же матриці $\text{diag}(w)$ у всіх випадках буде визначатися з контексту [15].

Якщо V – замкнута афінна алгебраїчна множина, то $A(V)$ – алгебра регулярних функцій на V , нарешті, якщо P – деяке твердження, то символ $[P]$ означатиме 1 або 0, в залежності від істинності чи хибності P , відповідно.

Для параметризованого тим чи іншим способом сімейства множин елементи сімейства з індексами, що виходять в область зміни параметра, визначаються порожніми.

Означення 2.1. Лінійною (дискретною) керованою системою над полем F називається рівняння:

$$X(t+1) = Ax(t) + Bu(t), \quad (2.1)$$

де $x \in X$, $u \in U$, а X і U – n і m -мірні F -векторні простору станів і вхідних сигналів або управлінь лінійної системи відповідно.

Крім того, $A: X \rightarrow X$ і $B: U \rightarrow X$ – лінійні оператори. Якщо в просторах X і U фіксовані деякі базиси, то $A \in M_{n \times n}$ і $B \in M_{n \times m}$.

Зауважимо, що співвідношення 2.1 можна ототожнити з парою матриць (A, B) . Надалі будемо використовувати обидва визначення лінійної системи, як еквівалентні.

У разі $F=\mathbb{R}$ або $F=\mathbb{C}$ пара (A, B) задає також (безперервну за часом) систему, яка визначається диференціальним рівнянням:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t). \quad (2.2)$$

На векторному просторі $X \oplus U$ задано дію групи $C = \text{Gln}(F)$, яка визначається заміною базисів в векторних просторах X і U :

$$(X, u) \rightarrow (T_x, u), (T) \in C. \quad (2.3)$$

Позначимо T_x через z , тоді співвідношення 2.1 має вигляд :

$$z(t+1) = T A T^{-1} z(t) + T B u(t). \quad (2.4)$$

Отже, отримано лінійну дію групи C на векторному просторі лінійних n -мірних систем з m -мірними входами $L(n, m)$:

$$\sigma: G \times L(n, m) \rightarrow L(n, m), \sigma: (T; (A, B)) \rightarrow (T A T^{-1}, T B). \quad (2.5)$$

Нижче $L(n, m)$ розглядається як алгебраїчне різноманіття, забезпечене дією σ і структурою часткової асоціативної алгебри (множення матриць).

Ця постановка призводить до задачі вивчення будови дії σ і, зокрема, опису його інваріантів і напівінваріантів.

Результати, отримані в цьому напрямку, містяться в множині робіт.

Нехай деяка алгебраїчна група G діє на афінному алгебраїчному різноманітті V і $\text{Aut}(V)$ – група автоморфізмів різноманіття V .

Тоді визначено гомоморфізм $\beta: G \rightarrow \text{Aut}(V)$ такий, що відображення $G \times V \rightarrow V, (g, v) \mapsto \beta(g)v$, є морфізмом алгебраїчних многовидів, званим дією β .

Коли ясно про які дії йде мова, замість $\beta(g)v$ пишуть g_v .

Функції $f \in A(V)$, для яких $g_f = f$ при всіх $g \in G$, де $g_f(v) = F(g^{-1}v)$, називають (абсолютними) інваріантами $G: V$ (або групи G); інваріанти утворюють підалгебру в алгебрі $A(V)$, що позначається $A(V)^G$ і так звану алгебру інваріантів дії $G: V$ (або групи G).

Напівінваріантом ваги χ дії $G: V$ називається така функція $f \in A(V)$, що $gf = \chi(g)f$, $\chi(g) \in F^*$, при всіх $g \in G$.

Функція χ автоматично є характером групи G . Символ $X \sim / G$ позначає алгебраїчне різноманіття, яке визначається звичайно-породженою F -алгеброю $A(X)^G$, а $\pi_G: X \rightarrow X \sim / G$ – морфізм, що задається вкладенням $A(X)^G \rightarrow A(X)$.

Розглянемо C -еквіваріантний морфізм алгебраїчних многовидів R :

$$L(n, m) \rightarrow M_n \times (n+1)m \cong F_n(n+1)m, R: (A, B) \rightarrow (B, AB, \dots, A_n B). \quad (2.6)$$

Дія C на $M_n \times (n+1)m$ задається співвідношенням:

$$18a. = g \cdot a \quad \forall g \in C, \forall a \in M_n \times (n+1)m. \quad (2.7)$$

Векторний простір $M_n \times (n + 1)$ тс введений дією групи S позначимо через K , а саму дію - символом k .

Матриця $R(A, B)$ називається *матрицею Калмана* або *матрицею досяжності системи* (A, B) , а множина її мінорів порядку $n \times n$ - $M_R(A, B)$.

Фактормножина множини $M_R(A, B)$ по відношенню еквівалентності $pg = qh$, де p і q елементи $F[\chi_1(A), \dots, X_n(A)]$ буде позначатися $Min_R(A, B)$.

Нехай BS - деяка однакова міра щодо градуювання степенями елементів матриці B системо утворюючих $Rg(m, n)$, як $F[\chi_1(A), \dots, X_n(A)]$ - алгебри, а $BS\chi$ - фактормножина BS по відношенню еквівалентності $p_{b0} = q_{b1}$, де $p, q \in F[\chi_1(A), \dots, X_n(A)]$, а $b_i \in BS$.

Нехай $P_f(X)$ позначає множину кінцевих підмножин множини X і справедлива наступна рівність:

$$Univ(BS) = \coprod_{i \in N} \coprod_{j \in N} \coprod_{x \in xk=1..i} \coprod_{BSxh=1} \{h, i, j, x\} \coprod_{j \in N} \{0, 0, j, \emptyset\}. \quad (2.8)$$

Означення 2.2. Мон-підмножиною назвемо підмножину $Univ(BS)$ виду $\{(-, 1, k, x)\}$.

Нехай $P \subseteq Univ(BS)$. Множину всіляких Мон-підмножин P позначимо як $Mон(P)$, а множину всіляких Мон-підмножин, що мають з P непорожні перетини - як $Mон(P)$.

За визначенням Мон-підмножини M_0 і M_1 ізоморфні, якщо існують такі $p, q \in F[\chi_1(A), \dots, X_n(A)]$, що

$$p \prod_{m \in M_0} \pi_{\pi_1(m)}(\pi_4(M_0)) = q \prod_{m \in M_1} \pi_{\pi_1(m)}(\pi_4(M_1)). \quad (2.9)$$

Означення 2.3. Категорія BS -систем в базисі BSS задається наступними даними. Об'єкти цієї категорії, які називаються BS -системами - такі елементи $S \in Pf(Univ(BS))$, що:

$$\{y \in Univ(BS) \mid \pi_2(y) = \pi_2(x) \wedge \pi_3(y) \leq \pi_3(x) \wedge \pi_4(y) = \pi\pi_3(y)(p)\} \subseteq S, \quad (2.10)$$

$$x \in S \Rightarrow (\forall y \in S (\pi_2(y) = \pi_2(x)) \wedge (\pi_3(y) = \pi_3(x)) \Rightarrow \pi_4(y) = \pi_4(x)). \quad (2.11)$$

Перше з зазначених вимог назвемо умовою фундаменту, друге - умовою складання. Будемо припускати, що

$$(0, 0, 1, \emptyset) \in S. \quad (2.12)$$

Тоді елементарний морфізм BS-систем з S_0 в S_1 є відображення $\varphi: S_0 \rightarrow S_1$, що задовольняє умові $\varphi((0, 0, 1, \emptyset)) = (0, 0, 1, \emptyset)$, і такий, що:

$$\forall M_0 \in \text{Mon}(S_0) \exists M_1 \in \text{Mon}(S_1) \varphi(M_0) \subseteq M_1. \quad (2.13)$$

Якщо для будь-якого $M_0 \in \text{Mon}(S_0)$ виявиться, що $p_i \in F[\chi_1(A), \dots, X_n(A)]$, то елементарний морфізм називається *строгим елементарним*.

Передбачається, що права частина наступного рівняння (2.13) вільна від нульових підсумм:

$$q \prod \pi_{\pi_1(m)}(\pi_4(m)) = \sum p_m \prod_{m \in M} \pi_{\pi_1(m)}(\pi_4(m)). \quad (2.14)$$

Коректність даної вимоги впливає з того, що максимальні мінори матриці Калмана є однорідні по елементам матриці B . Ця умова називається *умовою збереження структури*.

Морфізмом BS-систем називається кінцева композиція елементарних морфізмів, відповідно суворим морфізмом - кінцева композиція строгих елементарних морфізмів.

Підкатегорію категорії BS-систем, зі строгими морфізмом позначимо як BSS_{strict} .

Очевидно, введені поняття визначені коректно.

Епіморфізм в категорії BSS – в точності сюр'єктивний морфізм базисних систем.

Морфізм BS-систем - відображення множин, тому BSS має природну структуру категорії структурованих множин. Всякий сюр'єктивний морфізм є епіморфізмом [16].

2.2. Поняття напівретракції алгебраїчних систем

У цьому підрозділі групову операцію будемо позначати зірочкою $*$, зберігаючи мультиплікативне позначення [17].

Нейтральний елемент групи G будемо позначати через θ_G (опускаючи нижній індекс у випадках, коли це не викликає непорозуміння), а елемент, протилежний елементу $g \in G$ через \bar{g} (тобто $g * \bar{g} = \bar{g} * g = \theta_G$).

Через ι_G позначимо тотожний автоморфізм групи G (будемо говорити, що ι_G – операторна одиниця групи G), а через o_G – її нульовий ендоморфізм (тобто $go_G = \theta$ для всіх $g \in G$).

Для $g, h \in G$ покладемо:

$$[g; h] = g * h * \bar{g} * \bar{h}, h_{ig} = \bar{g}g * h * g. \quad (2.15)$$

Символ i_g при цьому будемо трактувати як образ елемента $g \in G$ при канонічному гомоморфізмі i позначимо наступне :

$$G \rightarrow \text{Int } G : g \rightarrow i_g \quad (2.16)$$

Якщо φ, ψ перетворення групи G , то через $\varphi * \psi$ будемо позначати їх суму [18]:

$$g(\varphi * \psi) = g_\varphi * g_\psi, g \in G. \quad (2.17)$$

Група G називається загальним добутком своїх підгруп U і H , якщо $G = U * H, U \cap H = \{\theta_G\}$.

При цьому говорять, що група G *факторизуюча* або що вона факторизується в загальний добуток своїх підгруп.

У наш час загальні добутки є одним із основних об'єктів обширної і розгалуженої теорії про властивості груп, що піддаються опису в термінах їх підгруп.

Основні поняття шрейєрової теорії розширень груп будемо використовувати в такій інтерпретації.

Нехай H_1, H_2 групи, для яких визначено відображення:

$$q : H_2 \times H_2 \rightarrow H_1 : (x; y) \rightarrow (x; y)q, \quad (2.18)$$

$$\sigma : H_2 \rightarrow \text{Aut} H_1 : x \rightarrow \sigma_x, \quad (2.19)$$

що задовольняють співвідношенням:

$$(t; u)q * (t * u; v)q = (u; v)q\sigma_t * (t; u * v)q, t, u, v \in H_2, \quad (2.20)$$

$$\sigma_{u*v} = \sigma_v\sigma_{ui}(u;v)q, u, v \in H_2. \quad (2.21)$$

Множина $H_1 \times H_2$ в цих умовах перетворюється в групу відносно операції:

$$(u_1; v_1) * (u_2; v_2) = (u_1 * u_2\sigma_{v_1} * (u_1; v_2)q; v_1 * v_2), \\ u_1, u_2 \in H_1, v_1, v_2 \in H_2. \quad (2.22)$$

Цю групу називають *шрейєровим добутком груп* H_1 і H_2 , який визначається системою факторів $(q; \sigma)$ (або, коротше, шрейєровим $(q; \sigma)$ -добутком).

Шрейєровий $(q; \sigma)$ -добуток груп H_1 і H_2 будемо позначати через $(H_1; H_2)S_q^\sigma$.

Означення 2.4. Лівою напівретракцією групи G називається таке її перетворення τ , для якого

$$(x * y)\tau = (x_\tau * y)\tau, x, y \in G \quad (2.23)$$

при будь-яких $x, y \in G$.

Якщо ж замість (2.23) виконується умова

$$(x * y)\tau = (x * y_\tau)\tau, \quad (2.24)$$

то говорять про праву напівретракцію групи G .

Очевидна двоякість понять лівої та правої напівретракцій дозволяє нам обмежитися розглядом лівих напівретракцій [19].

У множині усіх ідемпотентних перетворень групи G ліві напівретракції характеризуються властивістю трансверсальності.

Лема 2.1. Ідемпотентне перетворення τ групи G тоді й лише тоді буде лівою напівретракцією цієї групи, коли існує підгрупа $H \leq G$ така, що

$$x_\tau = y_\tau \Leftrightarrow x * y \in H, \quad (2.25)$$

які б не були $x, y \in G$.

Означення 2.5. Ліва напівретракція τ групи G називається *регулярною*, якщо $G_\tau = \text{Im } \tau$ підгрупа групи G . Перетворення $\tau' = \iota_G * \bar{\tau}$, де ι_G операторна одиниця групи G , називається *доповненням напівретракції* τ .

Означення 2.6. Ліва напівретракція τ групи G є регулярною тоді й лише тоді, коли її доповнення τ' є правою напівретракцією.

Теорема 2.1. Для будь-якої групи G наступні твердження є еквівалентними:

- 1) група G факторизуюча;
- 2) існують регулярна права й регулярна ліва напівретракції τ_1 і, відповідно, τ_2 такі, що

$$\tau_1 * \tau_2 = \iota_G, \tau_1 \tau_2 = \tau_2 \tau_1 = o_G. \quad (2.26)$$

Напівретракцією групи G називають таку її ліву напівретракцію τ , яка є також і правою.

Іншими словами, перетворення τ групи G називається *напівретракцією*, якщо при будь-яких $x, y \in G$ виконуються наступні умови:

$$(x * y)\tau = (x_\tau * y)\tau, \quad (2.27)$$

$$(x * y)\tau = (x * y_\tau)\tau. \quad (2.28)$$

Якщо τ деяка напівретракція групи, то її ядро (за визначенням)

$$K_{\text{ерт}} = \{x \in G \mid x\tau = \theta_\tau\} \quad (2.29)$$

є, як не важко перевірити, підгрупою групи G .

Критерій того, що ліва напівретракція є правою, дає лемі 2.2.

Лема 2.2. Для будь-якої лівої напівретракції τ довільної групи наступні умови рівносильні:

- 1) τ є правою напівретракцією групи G ;
- 2) ядро $K_{\text{ерт}}$ лівої напівретракції τ є нормальною підгрупою групи G .

Операторні властивості напівретракцій характеризуються лемою 2.3.

Лема 2.3. Перетворення τ тоді й лише тоді є напівретракцією групи G , коли

$$\theta_\tau = \theta_i \quad (x * y)\tau = (x_\tau * y_\tau)\tau \quad (2.30)$$

для всіх $x, y \in G$.

Якщо τ напівретракція групи G , то множина $G_\tau = \text{Im}\tau$ є, як легко перевірити, є групою відносно операції [22].

$$x(*_\tau)y = (x * y)\tau, \quad x, y \in \text{Im}\tau. \quad (2.31)$$

Цю групу називають τ -мутацією групи G і позначають через G^τ . Неважко помітити, що $G_\tau \cong G/K_{\text{ерт}}$.

Таким чином, при наявності напівретракції τ для групи G виникає представлення у вигляді шрейєрового добутку груп $K_{\text{ерт}}$ і G_τ .

Система факторів, що відповідає цьому шрейєровому добутку, визначається рівностями:

$$(x; y)q = (x * y)\tau', \quad x, y \in G_\tau, \quad (2.32)$$

$$\sigma_x = i_x, x \in G_\tau, \quad (2.33)$$

де τ' – доповнення напівретракції τ , а через i_g позначено внутрішній автоморфізм групи G , який відповідає елементу $g \in G$.

Якщо, навпаки, $G = (H_1; H_2)S_q^\sigma$, шрейєровий добуток груп H_1 і H_2 , то безпосередньо перевіряється, що перетворення

$$\tau : G \rightarrow G : (u; v) \rightarrow (\theta; v) \quad (2.34)$$

є напівретракцією групи G , при цьому $H_1 = K_{\text{ерт}}$, $H_2 = G^\tau$.

Означення 2.7. Для будь-яких груп G , H_1 , H_2 наступні умови еквівалентні:

$$1) G = (H_1; H_2)S_q^\sigma;$$

2) існує напівретракція τ групи G , для якої $H_1 \cong K_{\text{ерт}}$, $H_2 = G_\tau$ і для всіх $x, y \in G_\tau$ виконуються співвідношення (2.32), (2.33).

У [2] відзначено, що за допомогою напівретракцій для шрейєрових добутків вдається отримати аналог теореми, яка представляє собою узагальнення пірсовської декомпозиції напівгрупи ендоморфізмів прямого добутку груп [20].

Напівретракції напівгруп. У цьому пункті техніку напівретракцій моноїдів, запропоновану В.М. Усенком, поширено на довільні напівгрупи. Доведення наведених результатів ґрунтується на тих самих міркуваннях, що й доведення відповідних результатів роботи [21].

Нехай $E_q(X)$ – множина усіх еквівалентностей довільної множини X , I_ζ множина ідемпотентів симетричної напівгрупи $=(X)$.

Між множинами $E_q(X)$ та I_ζ існує взаємно однозначна (з точністю до еквівалентності) відповідність, яка полягає в тому, що для будь-якого $\xi \in I_\zeta$ виконується умова $(x; x_\xi) \in \nabla_\xi$, де ∇_ξ відношення рівнозначності перетворення ξ , тобто

$$\nabla_\phi = \{(x; y) | x, y \in X, x_\phi = y_\phi\}, \phi \in =(X). \quad (2.35)$$

Таким чином, множина $\text{Im}\xi$ перетворення $\xi \in I=(X)$ є трансверсаллю розбиття, що визначається відношенням ∇_ξ .

Навпаки, якщо образ $\text{Im } \xi$ перетворення $\xi \in \text{Con}(X)$ є трансверсаллю розбиття, що визначається деякою еквівалентністю $\pi \in E_q(X)$, причому $(x; x_\xi) \in \pi$ для всіх $x \in X$, то:

$$\xi^2 = \xi, \text{ а } \nabla_\xi = \pi. \quad (2.36)$$

Для довільної напівгрупи S важливу роль при цьому відіграє деяка підмножина множини $I=(S)$, елементи якої відповідають конгруенціям (можливо одностороннім) напівгрупи S .

Перетворення τ напівгрупи S називають *лівою напівретракцією*, якщо

$$(xy)\tau = (x\tau y)\tau \quad (2.37)$$

для всіх $x, y \in S$.

Якщо замість тотожності (2.37) виконується наступна:

$$(xy)\tau = (x\tau y)\tau, \quad (2.38)$$

то говорять про праву напівретракцію.

Двоїстість понять лівої та правої напівретракцій є очевидною.

Тому у випадку односторонніх напівретракцій обмежимося розглядом лівих напівретракцій.

Якщо для $\tau \in \text{Con}(S)$ виконуються обидві тотожності (2.37), (2.38), то перетворення τ називають *симетричною* напівретракцією напівгрупи S .

Необхідні та достатні умови, за якими ідемпотентне перетворення напівгрупи є її лівою напівретракцією, дає лему 2.4.

Лема 2.4. Ідемпотентне перетворення τ напівгрупи S є її лівою напівретракцією тоді й лише тоді, коли відношення рівнозначності ∇_τ є правою конгруенцією цієї напівгрупи.

Нехай μ – довільна права конгруенція напівгрупи S , $a \in S$, $[\mu]a = \{s \in S \mid (a; s) \in \mu\}$.

Якщо розглянути деяке фіксоване константне перетворення $e_a \in I([\mu]a)$ ($se_a = a$, $s \in [\mu]a$) і покласти $x_e = x_{e_a} \Leftrightarrow x \in [\mu]a$ для всіх $x \in S$, то отримаємо ідемпотентне перетворення множини S таке, що $\nabla_e = \mu$.

Отже, має місце наступна лема.

Лема 2.5. Для кожної правої конгруенції μ напівгрупи S існує її ліва напівретракція τ така, що $\nabla_\tau = \mu$.

Ліві напівретракції τ_1, τ_2 напівгрупи S називають *еквівалентними*, якщо має місце рівність $\nabla_{\tau_1} = \nabla_{\tau_2}$.

Твердження 2.1. Для ідемпотентного перетворення π напівгрупи еквівалентними є твердження:

- 1) π є симетричною напівретракцією;
- 2) π є лівою напівретракцією, а відношення $\nabla\pi$ її рівнозначності є конгруенцією напівгрупи S ;
- 3) π є правою напівретракцією, а відношення $\nabla\pi$ її рівнозначності є конгруенцією напівгрупи S ;
- 4) для всіх $x, y \in S$ виконується тотожність: $(xy)\pi = (x\pi y\pi)\pi$.

Якщо τ ідемпотентна напівретракція напівгрупи S , то множина $\text{Im}\tau$ є напівгрупою відносно операції $x \cdot_\tau y = (xy)\tau$, $x, y \in \text{Im}\tau$.

Напівгрупу $S^\tau = (\text{Im}\tau, \cdot_\tau)$ називають τ -*мутацією* напівгрупи S . Відображення $S \rightarrow S^\tau$: $x \rightarrow x^\tau$ при цьому є гомоморфізмом напівгруп, конгруенція якого, зрозуміло, збігається з відношенням рівнозначності напівретракції.

Навпаки, якщо $\phi : S \rightarrow T$ деякий гомоморфізм напівгруп, $\Delta\phi$ відповідна конгруенція, то, визначивши перетворення $\tau : S \rightarrow S$ умовами

$$(x; x_\tau) \in \Delta_\phi, x_\tau = y_\tau \Leftrightarrow (x; y) \in \Delta_\phi, \quad (2.39)$$

отримаємо ідемпотентну напівретракцію напівгрупи S таку, що $S^\tau \cong \text{Im}\phi$.

Таким чином, задача опису конгруенцій напівгруп заданого класу є еквівалентною задачею опису класів еквівалентних напівретракцій. Тобто, знаючи дію напівретракції напівгруп, ми можемо побудувати єдину конгруенцію, що їй відповідає, та, навпаки, знаючи будову конгруенції на напівгруп, можливо задати клас еквівалентних напівретракцій, відношення рівнозначності за якими збігаються з заданою конгруенцією.

2.3. Поняття 0-категорії. Напівретракції симетричної 0-категорії

У цьому пункті описано один тип напівретракцій симетричної 0-категорії та один тип напівретракцій симетричної інверсної 0-категорії.

При цьому вивчається будова мутацій відповідних 0-категорій в термінах матричних напівгруп.

Дамо визначення симетричної 0-категорії.

Нехай X – довільна не порожня множина, $U(X)$ множина усіх не порожніх підмножин множини X . Для будь-яких $A, B \in U(X)$ через $\text{Map}(A; B)$ позначатимемо множину всіх сюр'єктивних відображень $\phi : A \rightarrow B : x \rightarrow x_\phi$ множини A на множину B .

Якщо $\phi \in \text{Map}(A; B)$, то через $\text{Dom}\phi$ будемо позначати область визначення відображення ϕ , а через $\text{Im}\phi$ його область значень (образ), тобто:

$$\text{Dom}\phi = A, \text{Im}\phi = B. \quad (2.40)$$

На множині

$$\text{Sym}X = \{\phi \in \text{Map}(A; B) | A, B \in U(X)\} \quad (2.41)$$

природно визначеною є часткова операція композиції відображень.

Якщо $\phi, \psi \in \text{Sym}X$ такі, що $\phi \in \text{Map}(A; B)$, $\psi \in \text{Map}(C; D)$, то про композицію $\phi\psi$ можна говорити лише у випадку, коли $B \cap C = \emptyset$, а саме: якщо $M = B \cap C = \emptyset$, то композицією ϕ_ψ відображень ϕ і ψ називається відображення:

$$\phi|_{E_\psi|_M} : E \rightarrow F : x \rightarrow x(\phi\psi) = (x\phi)\psi, \quad (2.42)$$

де $E = \phi^{-1}(M)$, $F = \psi(M)$.

В даному випадку виникає напівгрупоїд (множина з бінарною частковою операцією), який називають *напівгрупоїдом* часткових перетворень множини X та позначають через $P=(X)$.

Цей напівгрупоїд не є алгебраїчною категорією.

Дійсно, нехай $\phi \in \text{Map}(A; B)$, $\psi \in \text{Map}(C; D)$ і $\eta \in \text{Map}(E; F)$ такі відображення із $P=(X)$, що добутки $\phi\psi$, $\psi\eta$ визначено і $x\psi \notin \text{Dom}\eta$ для кожного $x \in B \cap C$.

Це означає, що $\text{Im}\phi\psi \cap E = \emptyset$, тобто добуток $(\phi\psi)\eta$ відображень $\phi\psi$ та η не є визначеним.

Отже, напівгрупоїд часткових перетворень не є локально асоціативним.

Вимоги до визначення композиції $\phi\psi$ сюр'єктивних відображень $\phi, \psi \in \text{Sym}X$, де $\phi \in \text{Map}(A; B)$, $\psi \in \text{Map}(C; D)$, можна посилити: вважатимемо композицію $\phi\psi$ визначеною лише за умови $B = C$.

Напівгрупоїд, що при цьому виникає на множині $\text{Sym}X$, називається *симетричною категорією* на множині X та позначається через $\text{Sym}X$.

Симетрична категорія $\text{Sym}X$ на відміну від напівгрупоїда часткових перетворень є локально-асоціативним напівгрупоїдом.

Дійсно, якщо ϕ, ψ та η із $\text{Sym}X$ такі, що добутки $\phi\psi, \psi\eta$ визначено, то $\text{Im}\phi = \text{Dom}\psi, \text{Im}\psi = \text{Dom}\eta$.

Оскільки $\text{Dom}\psi\eta = \text{Dom}\psi, \text{Im}\phi\psi = \text{Im}\psi$, то добутки $(\phi\psi)\eta$ і $\phi(\psi\eta)$ є визначеними, при цьому $(\phi\psi)\eta = \phi(\psi\eta)$.

Якщо напівгрупоїд $\mathcal{K}P(X)$ часткових перетворень множини X доповнити зовнішнім анулятором 0 і для всіх $\phi \in \text{Map}(A; B)$, $\psi \in \text{Map}(C; D)$ таких, що $B \cap C = \emptyset$, покласти $\phi\psi = 0$, то отримаємо напівгрупу, яка називається *напівгрупою часткових перетворень* множини X .

Виявляється, що напівгрупа $\mathcal{K}\zeta^0(X)$ не є 0 -категорійною, оскільки для тотожного перетворення i_X множини X та відображень $\phi \in \text{Map}(A; A)$, $\psi \in \text{Map}(B; B)$, де $A = \{a\}$, $B = \{b\}$ ($a, b \in X$, $a \neq b$), маємо:

$$\phi i_X \neq 0, i_X \psi \neq 0, \phi i_X \psi = 0. \quad (2.43)$$

Приєднуючи до симетричної категорії $\text{Sym}X$ зовнішній нуль 0 і довизначивши операцію композиції $\phi\psi$ за правилом: $\phi\psi = 0$, коли $B \neq C$, отримаємо групоїд, який називається *симетричною 0 -категорією* на множині X і позначається через Sym^0X .

На відміну від напівгрупи часткових перетворень, симетрична 0 -категорія є категорійною в нулі напівгрупою, що перевіряється безпосередньо.

Відзначимо, що деякі структурні властивості симетричної 0-категорії та її піднадгруп симетричної інверсної 0-категорії, вивчалися в [10], [11].

Нехай X - довільна не порожня множина.

Визначимо бінарне відношення λ на множині $U(X)$ таким способом:

$$(A; B) \in \lambda \Leftrightarrow |A| \geq |B|. \quad (2.44)$$

Підмножину T із $\text{Sym}^0 X$, де $0 \notin T$, назовемо λ -системою (ненульових) представників даної напівгрупи, якщо для всіх $(A; B) \in \lambda$ існує лише один елемент $\phi \in \text{Map}(A; B)$, для якого $\phi \in T$.

Якщо T – деяка λ -система представників $\text{Sym}^0 X$ і $\psi \in T \cap \text{Map}(A; B)$, де $(A; B) \in \lambda$, то представника ψ позначатимемо через ψ_{AB} .

Через T_X позначимо множину всіх λ -систем представників $\text{Sym}^0 X$. Визначимо перетворення $\delta_T \in \zeta \text{Sym}^0 X$, де $T \in T_X$, поклавши $\delta_T(0) = 0$ та

$$\delta_T(\phi) = \phi_{AB} \Leftrightarrow \phi \in \text{Map}(A; B) ((A; B) \in \lambda) \quad (2.45)$$

для кожного $\phi \in \text{Sym}^0 X$, $\phi \neq 0$.

Лема 2.6. Перетворення δ_T є *напівретракцією* напівгрупи $\text{Sym}^0 X$ при будь-якому $T \in T_X$.

Доведення. Нехай $\phi, \psi \in \text{Sym}^0 X$. Якщо хоча б один з цих елементів дорівнює нулю або $\phi, \psi \in \text{Sym}^0 X$ такі, що

$$\phi \neq 0 \text{ і } \text{Im}\phi \neq \text{Dom}\psi, \text{ то } \delta_T(\phi\psi) = \delta_T(0) = \delta_T(\delta_T(\phi)\delta_T(\psi)). \quad (2.46)$$

В інших випадках, тобто коли $\phi, \psi \in \text{Sym}^0 X$ такі, що $\phi \neq 0 \neq \psi$ та $\text{Im}\phi = \text{Dom}\psi$, отримуємо:

$$\begin{aligned} \delta_T(\phi\psi) &= (\phi\psi)_{\text{Dom}\phi\psi} \text{Im}_{\phi\psi} = \eta_{\text{Dom}\phi} \text{Im}_{\psi}, \text{ де } \eta = \phi\psi, \delta_T(\delta_T(\phi)\delta_T(\psi)) = \delta_T \\ &(\phi_{\text{Dom}\phi} \text{Im}_{\phi\psi\text{Dom}\psi} \text{Im}_{\psi}) = \delta_T(\phi) = \phi_{\text{Dom}\phi} \text{Im}_{\psi}, \text{ де } \phi_{\text{Dom}\phi} \text{Im}_{\phi\psi\text{Dom}\psi} \text{Im}_{\psi} = \phi \in \\ &\text{Map}(\text{Dom}\phi; \text{Im}\psi). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Звідки $\eta_{\text{Dom}\phi} \text{Im}_{\psi} = \phi_{\text{Dom}\phi} \text{Im}_{\psi}$.

Лему доведено.

Нехай $M = X \times X$, 0 зовнішній елемент, тобто $0 \notin M$.

На множині $M_0 = (X \times X) \cup \{0\}$ визначимо операцію за правилом:

$$(a; b)(c; d) = \begin{cases} (a; d), b = c \\ 0, b \neq c \end{cases}, \quad (2.48)$$

$$(a; b)0 = 0(a; b) = 0. \quad (2.49)$$

Множина M^0 з такою операцією є напівгрупою з нулем, оскільки напівгрупоїд M задовольняє умовам Конрада.

Отриману напівгрупу назовемо *матричною напівгрупою* та позначимо через M^0_X .

Відзначимо, що матрична напівгрупа M^0_X є напівгрупою Брандта.

Якщо ρ – деяке транзитивне бінарне відношення на множині X , то множина ρ^0 , де $\rho^0 = \rho \cup \{0\}$, є піднапівгрупою матричної напівгрупи M^0_X .

Цю піднапівгрупу будемо позначати $M^0_{X(\rho)}$.

Означення 2.8. Для будь-якої напівретракції δT напівгрупи $Sym^0_X \delta T$ – мутація $(Sym^0_X)^{\delta T}$ є ізоморфною напівгрупі $M^0_{U(X)}(\lambda)$.

Доведення. Визначимо відображення:

$$f : (Sym^0_X)^{\delta T} \rightarrow M^0_{X(\lambda)} : \phi_{AB} \rightarrow f(\phi_{AB}), \quad (2.50)$$

де

$$f(\phi_{AB}) = \begin{cases} (A; B), \phi_{AB} \neq 0 \\ 0, \phi_{AB} = 0. \end{cases} \quad (2.51)$$

яке, як неважко пересвідчитися, є гомоморфізмом.

Якщо принаймні один з елементів $\phi_{AB}, \phi_{CD} \in (Sym^0_X)^{\delta T}$ дорівнює 0, то перевірка тотожності гомоморфізму для f є тривіальною.

Крім цього, відображення f є бієкцією.

Твердження доведено.

Через $BSym^0_X$ позначимо підмножину із симетричної 0-категорії Sym^0_X , яка складається з усіх взаємно однозначних часткових перетворень множини X в об'єднанні з нулем, тобто

$$BSym^0_X = \{\phi \in Sym^0_X | \phi = 0 \vee (\phi \neq 0, \phi - \text{бієкція})\}. \quad (2.52)$$

Неважко помітити, що $BSym^0_X$ є *піднапівгрупою* напівгрупи Sym^0_X .

Її називають *симетричною інверсною 0-категорією* на множині X .

Нехай μ – відношення рівно потужності на множині $U(X)$. Підмножину H із $BSym^0_X$, де $0 \notin T$, назовемо μ -системою (ненульових)

представників цієї напівгрупи, якщо для всіх $(A; B) \in \mu$ існує лише один елемент $\psi \in \text{Map}(A; B)$, для якого $\psi \in H$.

Якщо H μ -система представників $\text{BSym}^0 X$ і $\psi \in H \cap \text{Map}(A; B)$, де $(A; B) \in \mu$, то представника ψ позначатимемо через ψ_{AB} .

Позначимо через H_X множину всіх μ -систем з $\text{BSym}^0 X$ і визначимо перетворення $\delta_H \in \zeta \text{BSym}^0 X$, де $H \in H_X$, поклавши $\delta_H(0) = 0$ та:

$$\delta_H(\psi) = \psi_{AB} \Leftrightarrow \psi \in \text{Map}(A; B) ((A; B) \in \mu) \quad (2.53)$$

для кожного $\psi \in \text{BSym}^0 X$, $\psi \neq 0$.

Означення 2.9. Для будь-якого $H \in H_X$ перетворення δ_H є напівретракцією напівгрупи $\text{BSym}^0 X$ такою, що δ_H -мутація $(\text{BSym}^0 X)^{\delta_H}$ ізоморфна напівгрупі $M^0_{U(X)}(\mu)$.

Доведення [18,19].

Можна довести, що δ_H є напівретракцією напівгрупи $\text{BSym}^0 X$ при будь-якому $H \in H_X$.

Крім того, безпосередньою перевіркою можна переконатися, що відображення $f : (\text{BSym}^0 X)^{\delta_H} \rightarrow M^0_{U(X)}(\mu)$, яке визначається умовою:

$$f(\psi_{AB}) = \begin{cases} (A; B), \psi_{AB} \neq 0, \\ 0, \psi_{AB} = 0 \end{cases} \quad (2.54)$$

є ізоморфізмом.

Твердження доведено.

РОЗДІЛ 3. ЗРІЗИ ВІДНОШЕНЬ ГРІНА НА СИМЕТРИЧНІЙ ІНВЕРСНІЙ 0-КАТЕГОРІЇ

3.1. Загальні положення

В рамках даного розділу розглянемо зрізи відношень Гріна на симетричній інверсній 0-категорії, так як вони представляють актуальний напрямок досліджень в нинішній час (більш детально див. [34]).

Для початку визначимо основні поняття і загальні положення.

Припустимо, що α – відношення еквівалентності на напівгрупі S . Піднапівгрупа T напівгрупи S називається *зрізом*, який відповідає відношенню α (або α -зрізом), якщо T містить в точності по одному елементу з кожного класу еквівалентності.

Найбільший інтерес для досліджень представляють зрізи тих еквівалентностей, які пов'язані з напівгруповою операцією деякими властивостями.

Першими претендентами на такі еквівалентності є конгруенції і відношення Гріна.

Як відомо, відношення Гріна грають істотну роль в структурній теорії напівгруп. Вивчення зрізів, відповідних відношень Гріна на певних напівгрупах, було розпочато досить давно.

Найбільш вивченими є зрізи симетричних напівгруп. Для симетричної інверсної напівгрупи X перший приклад інверсного H - зрізу побудований в [1].

Повний опис всіх H - зрізів для кінцевої напівгрупи X отримано в [2]. Всі L -і R -зрізи напівгрупи X і їх співвідношення з H - зрізами цієї напівгрупи описані в [3].

Зрізи L -, R - і H - еквівалентностей Гріна на нескінченній симетричній інверсній напівгрупі X вивчалися в [4].

Зрізи відношень Гріна вивчалися і на інших напівгрупах. Так, для напівгрупи Брауера B_n всі L - і R -зрізи були вивчені в [6].

Там же знайдено всі H - зрізи напівгрупи B_n . Опис усіх зрізів відношень Гріна на ортогональній сумі напівгруп отримано в [7]. На часткових сплетеннях інверсних напівгруп L - і R -зрізів вивчалися в [8]. Природним в цьому напрямку є завдання опису зрізів відношень Гріна на різних напівгрупах перетворень.

Дійсно, кожний зріз напівгрупи є її піднапівгрупою, тому вивчення зрізів на напівгрупах повних (часткових) перетворень виправдовується тим фактом, що будь-яку напівгрупу (інверсну напівгрупу) можна вкласти в симетричну напівгрупу (симетричну інверсную напівгрупу).

У цьому розділі ми розглянемо зрізи, які відповідають усім відношенням Гріна L , R , J , D і H на напівгрупі часткових бієктивних перетворень, так званої симетричної інверсної 0 -категорії.

Ця півгрупа є категорним аналогом симетричної інверсної напівгрупи, вона виходить приєднанням нуля до множини морфізму малої категорії, об'єктами якої є непусті підмножини заданої множини, а морфізм – бієктивне відображення.

Основною відмінністю такої напівгрупи від симетричної інверсної напівгрупи є відсутність властивості 0 -категорійності у останньої.

Структурні властивості симетричної інверсної 0 - категорії і її наднапівгрупи - симетричної 0 -категорії - розглядалися в [9, 10].

Зауважимо, що різні узагальнення симетричної інверсної напівгрупи вивчалися в [11, 12].

Нехай X – довільна непорожня множина. Симетричною інверсною напівгрупою на множині X називається множина всіх взаємно однозначних часткових перетворень множини X з операцією композиції часткових функцій.

Ця півгрупа позначається як I_X .

Якщо $\eta \in I_X$, то через $\text{dom}(\eta)$ і $\text{im}(\eta)$ будемо позначати область визначення і область значень відображення η відповідно, а через $r_k(\eta)$ - кардинальне число $|\text{dom}(\eta)| = |\text{im}(\eta)|$.

На множині I_X визначимо бінарну операцію:

$$\begin{cases} \varphi\psi = \varphi \bullet \psi, \varphi \neq 0 \neq \psi, \text{im}(\varphi) = \text{dom}(\psi), \\ 0, \text{в інших випадках} \end{cases}, \quad (3.1)$$

де 0 - відображення пустої підмножини.

З такою операцією, як неважко помітити, множина всіх взаємно однозначних часткових перетворень множини X також є напівгрупою, яка називається *симетричною інверсною 0-категорією* на множині X .

Отриману напівгрупу будемо позначати як IC_X . Якщо X – кінцева множина, то для напівгрупи IC_X будемо використовувати позначення IC_n .

Ненульовий ідемпотент e напівгрупи S з нулем називається *примітивним*, якщо e є мінімальним елементом множини всіх ненульових ідемпотентів з S .

Регулярна півгрупа S з нулем називається *примітивною*, якщо примітивний кожен її ненульовий ідемпотент.

Конгруенція α на інверсній напівгрупі S з нулем називається *0-обмеженою*, якщо $\{0\} \in \alpha$ -класом.

Гомоморфізм φ напівгрупи S з нулем називають *0-обмеженим*, якщо такою є конгруенція $\varphi \bullet \varphi^{-1}$. Гомоморфний образ 0-обмеженого гомоморфізму називається *0-обмеженим гомоморфним образом*.

Зрозуміло, що 0-категорія IC_X , як і півгрупа I_X , є інверсною напівгрупою з нулем. Однак, на відміну від напівгрупи I_X , симетрична інверсна 0-категорія є категорійною в нулі напівгрупою: для будь-яких її елементів φ, ψ, η з умови $\varphi\psi\eta = 0$ випливає, що $\varphi\psi = 0$ або $\psi\eta = 0$.

З іншого боку, IC_X є універсальним об'єктом для категорійних в нулі інверсних напівгруп, а саме, має місце теорема 3.1.

Теорема 3.1. Будь-яка категорійна в нулі інверсна півгрупа володіє 0-обмеженим примітивним гомоморфним образом в симетричній інверсній 0-категорії.

Доведення. Нехай S - категорійна в нулі інверсна півгрупа. Згідно з [14] півгрупа S володіє 0-обмеженим примітивним гомоморфним образом, який позначимо через T .

Відомо, що гомоморфний образ інверсної напівгрупи є інверсною напівгрупою, тому T - інверсна.

Тоді T , як примітивна інверсна півгрупа, є ортогональною сумою цілком 0-простих інверсних напівгруп B_i , $i \in I$, тобто напівгруп Брандта.

Для кожного $i \in I$ через G_i позначимо структурну групу напівгрупи Брандта B_i , через $E(G_i)$ – множину ненульових ідемпотентів B_i , а через H_i – групу, яка містить G_i як підгрупи індексу $|E(G_i)|$.

Нехай F_i – множина всіх відображень правих суміжних класів групи H_i по напівгрупі G_i .

Для всіх $i \in I$ множина $F_{0i} = F_i \cup \{0\}$, де 0 - пусте відображення, є піднапівгрупою 0-категорії IC_H , ізоморфною напівгрупі Брандта B_i .

Отже, півгрупа T ізоморфна піднапівгрупі $F = F_{0i}$ симетричної інверсної 0-категорії IC_H , $H = \cup H_i$.

Теорема доведена.

Напівгрупу з нулем S_0 називають *ортогональною сумою* (або 0-прямим об'єднанням) напівгруп S_{α} , $\alpha \in Y$, і позначають:

$$S_0 = \sum_{\alpha \in Y} S_{\alpha}. \quad (3.2)$$

S_{α} , $\alpha \in Y$, - ненульові напівгрупи, які визначаються наступним виразом:

$$S^0 = \cup S_{\alpha} \quad (3.3)$$

і при будь-яких різних $\alpha, \beta \in Y$ виконуються умови:

$$S_{\alpha} \cap S_{\beta} = S_{\alpha} S_{\beta} = \{0\} \quad (3.4)$$

У разі, коли система $D = \{S_{\alpha} \mid \alpha \in Y\}$ задає декомпозицію S_0 в ортогональній сумі напівгруп, D називають *ортогональною декомпозицією* напівгрупи S_0 , а S_{α} , $\alpha \in Y$, - ортогональними компонентами.

Нехай X - довільна непорожня множина, I - множина всіх кардинальних чисел α , $1 \leq \alpha \leq |X|$. Нескладно переконатися, що D є класами напівгрупи IC_X є множини:

$$D_\alpha = \{\varphi \in IC_X \mid r_k(\varphi) = \alpha\}, \text{ де } \alpha \in I. \quad (3.5)$$

Для кожного $\alpha \in I$ справедливий такий вираз:

$$D_\alpha^0 = D_\alpha \cup \{0\}, \text{ где } 0 \in IC_X. \quad (3.6)$$

Згідно [16] будь-яка півгрупа з нулем має найбільшу ортогональну декомпозицію. Для симетричної інверсної 0-категорії цю декомпозицію описує наступне означення.

Означення 3.1. Система $P = \{D_{i0} \mid i \in I\}$ - найбільша ортогональна декомпозиція напівгрупи IC_X .

Доведення. Множини D_{0i} , $i \in I$, є ненульовими піднапівгрупами IC_X , такими що $D_\lambda \cap D_\mu = \{0\}$ для всіх різних $\lambda, \mu \in I$ виконується рівність:

$$IC_X = \bigcup_{i \in I} D_i^0. \quad (3.7)$$

Крім того, при будь-яких $\varphi \in D_\lambda$, $\psi \in D_\mu$, де $\lambda \neq \mu$, маємо $\varphi\psi = 0$. Значить:

$$IC_X = \sum D_i^0. \quad (3.8)$$

Нехай $P' = \{T_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ - довільна ортогональна декомпозиція IC_X . Візьмемо $D_i^0 \in P$, де $i \in I$, i ненульовий елемент $\varphi \in D_i^0$. Зрозуміло, що $\varphi \in T_\sigma$ для деякого $\sigma \in \Lambda$. Покладемо наступне:

$$A = \{\psi \in D_i^0 \mid \psi\varphi \neq 0\}, B = \{\psi \in D_i^0 \mid \psi\varphi = 0\}. \quad (3.9)$$

Мають місце включення $A \subseteq T_\sigma$ і $B \subseteq T_\sigma$, звідки $A \cup B \subseteq T_\sigma$.

З іншого боку, кожен елемент з D_i^0 представимо як добуток $f\varphi g$ для деяких відповідних $f \in A$ і $g \in B$. Таким чином, $D_i^0 \subseteq A \cup B$, і отже $D_i^0 \subseteq T_\sigma$.

Значить, $P' \leq P$.

Означення доведено.

Безпосередня перевірка показує, що відношення Гріна на напівгрупі IC_X описуються, як і на симетричній інверсній напівгрупі.

Означення 3.2. Нехай $\varphi, \psi \in IC_X$.

Справедливі наступні твердження:

- (I) $(\varphi; \psi) \in L$ тоді і тільки тоді, коли $\text{im}(\varphi) = \text{im}(\psi)$;
- (II) $(\varphi; \psi) \in R$ тоді і тільки тоді, коли $\text{dom}(\varphi) = \text{dom}(\psi)$;
- (III) $(\varphi; \psi) \in J$ тоді і тільки тоді, коли $r_k(\varphi) = r_k(\psi)$; $(I_v) D = J$.

Якщо $\rho \subseteq X \times X$ – довільне відношення і $A \subseteq X$, то обмеження відношення ρ на підмножині A будемо позначати як $\rho \upharpoonright A$.

Означення 3.3. Нехай S^0 – довільна ортогональна сума, а ρ – будь-яке відношення Гріна на напівгрупі S^0 .

Підмножина T напівгрупи S^0 є її ρ -зрізом тоді і тільки тоді, коли для всіх $\alpha S_0 = \sum_{\alpha \in Y} S_\alpha \in Y$ множина $T \cap S_\alpha \in \rho \upharpoonright S_\alpha$ є зрізом напівгрупи S_α .

Таким чином, опис зрізів відношень Гріна на симетричній інверсній 0-категорії зводиться до опису зрізів відношень Гріна на ортогональних компонентах D_i^0 , $i \in I$.

Відзначимо, що випадки відношень L і R двоїсті один до одного, тому всюди далі для визначеності буде розглядатися тільки R .

3.2. Опис R-зрізів напівгрупи IC_X

Множину всіх ідемпотентів довільної напівгрупи S будемо позначати через $E(S)$ ($\text{Nil}(S)$).

Нехай D_i^0 , $i \in I$, – довільна компонента найбільшої ортогональної декомпозиції IC_X , $U(X)$ – множина всіх підмножин множини X . Покладемо наступне:

$$U_i(X) = \{Y \in U(X) \mid |Y| = i\}, U_i^0(X) = U_i(X) \cup \{\emptyset\}, \text{де } i \in I. \quad (3.10)$$

Для кожної непорожньої $A \subseteq IC_X$ припустимо, що $A^{-1} = \{\varphi^{-1} \mid \varphi \in A\}$ і справедлива наступна рівність:

$$\text{dom}(A) = \{\text{dom}(\varphi) \mid \varphi \in A\}, \text{im}(A) = \{\text{im}(\varphi) \mid \varphi \in A\}. \quad (3.11)$$

Відношення $\alpha \subseteq X \times Y$ називається *функціональним*, якщо для будь-якого x з області визначення відношення α існує єдиний $y \in Y$, такий що $(x; y) \in \alpha$.

Функціональне відношення α називається *функцією*, якщо область визначення α збігається з множиною X .

Для кожної непорожньої $A \subseteq D_i^0$ покладемо наступну рівність:

$$\rho^A = \{(K; \varphi) \in U_0^i(X) \times A \mid K = \text{dom}(\varphi)\}, \quad (3.12)$$

$$\rho = \{(K; \varphi) \in U_0^i(X) \times A \mid K = \text{im}(\varphi)\}, \quad (3.13)$$

Лема 3.1. Нехай $A \subseteq D_i^0$, $i \in I$. Еквівалентні наступні умови:

- (I) $A \in R$ -зрізом напівгрупи D_i^0 ;
- (II) $\rho A \in$ функцією і $\varphi\psi \in \{\Phi, 0\}$ для всіх $\varphi, \psi \in A$;
- (III) $\rho A^{-1} \in$ функцією і $\varphi\psi \in \{\Psi, 0\}$ для всіх $\varphi, \psi \in A^{-1}$;
- (IV) $A^{-1} \in L$ -зрізом напівгрупи D_i^0 .

Доведення. (I) \Rightarrow (II).

Оскільки A складається з елементів, взятих в точності по одному з кожного R -класу на D_i^0 , то $U_{0i}(X) = \text{dom}(A)$, при цьому відношення ρA функціональне.

Нехай $\varphi, \psi \in A$ обрані так, що $\varphi \neq 0$.

Оскільки $A \in$ напівгрупою, то $\varphi \circ \psi \in A$. З огляду на умову $\text{dom}(\varphi \circ \psi) = \text{dom}(\varphi)$, отримуємо $(\varphi \circ \psi; \varphi) \in R$, і отже $\varphi \circ \psi = \varphi$.

(II) \Rightarrow (III). Зрозуміло, що $\rho A^{-1} \in$ функцією. Нехай $\varphi, \psi \in A^{-1}$ вибрані так, що $\varphi \neq \psi$ і $\varphi \neq \psi 0$.

Тоді φ, ψ не є ідемпотентом. Припустимо, що $\varphi \in \text{Nil}(D_i^0)$, тоді для φ^{-1} , ψ^{-1} маємо:

$$\text{im}(\psi^{-1}) = \text{dom}(\psi) = \text{im}(\varphi) = \text{dom}(\varphi^{-1}). \quad (3.14)$$

звідки $\psi^{-1}\varphi^{-1} \neq 0$. За умовою (II), $\psi^{-1}\varphi^{-1} = \psi^{-1}$. Тоді $\varphi^{-1} \in E(D_i^0)$, що суперечить припущенню.

Таким чином, φ є ідемпотентом, а ψ – нільелементом.

Значить, $\varphi\psi = \psi$.

(III) \Rightarrow (IV). Очевидно.

(IV) \Rightarrow (I).

Так як $A^{-1} \in L$ - зрізом напівгрупи D_i^0 , то A містить в точності по одному елементу з кожного R -класу.

Нехай $\varphi, \psi \in A$ обрані так, що $\varphi \neq \psi \neq 0$. Тоді або $\varphi = \psi_0$, і отже $\varphi^2 = \varphi \in A$, або φ - нільелемент близько 2, а ψ - ненульовий ідемпотент, і як наслідок, $\varphi\psi = \varphi \in A$.

В інших випадках, $\varphi\psi = 0 \in A$.

Таким чином, A буде R -зрізом D_i^0 .

Лема доведена.

Для всіх непустих $A \subseteq ICX$ покладемо

$$\sigma^A = \{(K; \varphi) \in U(X) \times A \mid K = \text{dom}(\varphi), \quad (3.15)$$

$$\sigma = \{(K; \varphi) \in U(X) \times A \mid K = \text{im}(\varphi). \quad (3.16)$$

З означення 3.2 і леми впливає наступна теорема.

Теорема 3.2. нехай $A \subseteq ICX$. Еквівалентні наступні умови:

- (I) $A \in R$ -зрізом напівгрупи ICX ;
- (II) $\sigma A \in$ функцією і $\varphi\psi \in \{\Phi, 0\}$ для всіх $\varphi, \psi \in A$;
- (III) $\sigma A^{-1} \in$ функцією і $\varphi\psi \in \{\Psi, 0\}$ для всіх $\varphi, \psi \in A^{-1}$;
- (IV) $A^{-1} \in L$ -зрізом напівгрупи ICX .

Позначимо через $\text{Marb}(A; B)$ множину всіх бієктивних відображень з множини A в множину B .

Лема 3.2. Будь-який R -зріз напівгрупи D_i^0 , $i \in I$, містить принаймні один ненульовий ідемпотент.

Доведення. Нехай T – це R -зріз напівгрупи D_i^0 , $i \in I$, який не містить жодного ненульового ідемпотенту, і $\varphi \in \text{Marb}(A; B) \cap T$, $\varphi \neq 0$.

Якщо $A = B$, то беручи до уваги, що T – піднапівгрупа з D_i^0 , отримуємо $\varphi^2 \in \text{Marb}(A; A) \cap T$.

Оскільки при цьому $(\varphi; \varphi^2) \in R$ і $T \in R$ -зріз, то $\varphi = \varphi^2$, останнє суперечить вихідному припущенню.

Значить, $A \neq B$, і отже $\text{dom}(\varphi) \neq \text{im}(\varphi)$ для всіх $\varphi \in T$, $\varphi \neq 0$.

Так як $T \in R$ -зріз D_i^0 , в T існує відображення ψ , для якого $\psi \in \text{Marb}(B; C)$, де $B \neq C$. Тому $\varphi \circ \psi \in \text{Marb}(A; C) \cap T$. Значить, $(\varphi; \varphi \circ \psi) \in R$.

Отже, $\varphi \circ \psi = \varphi$ і тоді $B = C$.

Лема доведена.

Для підмножини A напівгрупи з нулем S_0 через A будемо позначати множину $A \setminus \{0\}$, через C_{kn} – число всіх сполучень без повторень з n елементів по k .

Лема 3.3. Нехай D_i^0 , $i \in I$, – довільна компонента найбільшої ортогональної декомпозиції напівгрупи IC_n і $m = C_n^i$. Число всіх різних R -зрізів напівгрупи D_i^0 :

$$\sum_{j=1}^m C_m^j \cdot (i! \cdot j)^{m-j}. \quad (3.17)$$

Доведення. Нехай T – довільний R -зріз напівгрупи D_i^0 , $i \in I$, який містить l ненульових ідемпотентів. Згідно лемі 3.2, число l задовольняє умові $1 \leq l \leq m$. Якщо $l = m$, то існує єдиний R -зріз D_i^0 :

$$T = \{i_A, 0 | A \in U_i(X)\}, \quad (3.18)$$

де i_A – тотожне перетворення множини A .

Нехай $l \neq m$. З означення 3.2 випливає, що R -еквівалентність на D_i^0 має m ненульових класів. Тоді $m - l$ елементів з T є нільелементами близько 2.

Припустимо: існує такий $\varphi \in \text{Nil}'(T)$, що $\text{im}(\varphi) \neq \text{im}(\psi)$ для будь-якого $\psi \in E'(T)$. Якщо $|\text{Nil}(T)| = 2$, то в T немає відображення з областю визначення, що дорівнює $\text{im}(\varphi)$, а це суперечить тому, що $T \in R$ -зріз. Нехай $|\text{Nil}(T)| \geq 3$. Оскільки $T \in R$ зрізом D_i^0 , то знайдеться $\eta \in \text{Nil}'(T)$, для якого $\eta \neq \varphi$ і $\text{dom}(\eta) = \text{im}(\varphi)$.

Звідси $\varphi\eta \neq 0$ і, по лемі 3.3, $\varphi\eta = \varphi$, тобто H – ідемпотент. Таким чином, вихідне припущення невірне, і отже для будь-якого $\varphi \in \text{Nil}'(T)$ існує $\psi \in E'(T)$, таке що $\text{im}(\varphi) = \text{im}(\psi)$.

Нехай $f \in \text{Nil}'(T)$. Образ $\text{im}(f)$ можна вибрати l способами (тобто в T існує l ненульових ідемпотентів), а область визначення $\text{dom}(f)$ – $m - l$ числом способів.

При цьому для фіксованих множин $\text{dom}(f)$, $\text{im}(f)$ саме відображення f може бути вибрано $i!$ способами.

Таким чином, нільелементні відображення для R -зрізу T з l ненульовими ідемпотентами можна вибрати $(l \cdot i!)^{M-l}$ способами.

З огляду на те, що ненульові ідемпотенти для R -зрізу можна вибрати C_m^l способами, загальне число всіх R -зрізів напівгрупи D_i^0 буде таким:

$$\sum_{l=1}^m C_m^l (i! l)^{m-l} + 1 = \sum_{l=1}^m C_m^l (i! l)^{m-l}. \quad (3.19)$$

Лема доведена.

З леми 3.3 і визначення 3.2 випливає наступна теорема.

Теорема 3.3. Нехай $m = C_n^i$. Число всіх різних R -зрізів симетричної інверсної 0-категорії IC_n буде дорівнювати:

$$\prod_{i=1}^n (\sum_{j=1}^m C_m^j (i! j)^{m-j}). \quad (3.20)$$

3.3. Опис J- и H - зрізів IC_X

Нехай X – довільна непорожня множина. На будь-якій напівгрупі D_i^0 , $i \in I$, напівгрупи IC_X відношення Гріна J , D збігаються і дорівнюють відношенню:

$$(D_i X D_i) \cup \{(0; 0)\}. \quad (3.21)$$

Очевидною є наступна лема, необхідна для опису всіх J - зрізів напівгрупи IC_X .

Лема 3.4. Для будь-якої $i \in I$ підмножини виду $\{0, \varphi\} \subseteq D_i^0$, де $\varphi^2 = \varphi$ або $\varphi^2 = 0$, і тільки вони є J - зрізами напівгрупи D_i^0 .

Безпосередньо з леми 3.4 і означення 3.2 випливає:

Теорема 3.3. Підмножини виду $\{0, \varphi_i \mid i \in I\}$, де $\varphi_i \in D_i$, $\varphi_i^2 = \varphi_i$ або $\varphi_i^2 = 0$, і тільки вони є J - зрізами напівгрупи IC_X .

У разі, коли D_i^0 є піднапівгрупою в IC_n , число всіх різних J – зрізів напівгрупи D_i^0 дорівнює наступному виразу:

$$|E'(D_i^0)| + |Nil'(D_i^0)| = C_n^i + ((C_n^i)^2 - C_n^i)i!. \quad (3.22)$$

Таким чином, має місце наступна теорема:

Теорема 3.4. Число всіх різних J - зрізів симетричної інверсної 0-категорії IC_n дорівнює наступного виразу:

$$\prod_{i=1}^n C_n^i + \left((C_n^i)^2 - C_n^i \right) i!. \quad (3.23)$$

Нагадаємо: якщо $\{X_j \mid j \in J\}$ – сімейство непустих підмножин множини X , то системою різних представників (або трансверсальми) цього сімейства називається множина всіх елементів, взятих в точності по одному з кожної підмножини $X_j, j \in J$.

Нехай X – множина, така, що $|X| = N > 1$. Для кожного i , де $1 \leq i \leq n - 1$, покладемо:

$$\begin{aligned} U_i(x) &= \{A_1, A_2 \dots A_m\}. m = C_n^i, \\ P_i &= \{Map(A_j; A_{j+1}) \mid 1 \leq j \leq m - 1\}; \end{aligned} \quad (3.24)$$

нехай, крім того

$$P_n = \{\{i_x\}\} \cup P = \bigcup_{i=1}^n P_i. \quad (3.25)$$

Для всіх i , таких що $1 \leq i \leq n - 1$, множина:

$$S_i^< = (\bigcup_{1 \leq k \leq l \leq m} Map_b(A_k; A_l)) \cup (0) \quad (3.26)$$

є підгрупою напівгрупи D_i^0 . Тоді

$$S^< = \bigcup_{1 \leq i \leq n-1} S_i^<. \quad (3.27)$$

є піднапівгрупою в IC_n . Двоєюко визначається піднапівгрупа $S^>$.

Теорема 3.5. Нехай T – довільна трансверсаль сімейства P . Підмножина, породжена об'єднанням $T \cup T^{-1}$, є H - зрізом напівгрупи IC_n . І навпаки, будь-який H - зріз напівгрупи IC_n має вигляд $\langle T \cup T^{-1} \rangle$, де T – трансверсаль сімейства P .

Доведення. Для кожного i , такого що $1 \leq i \leq n - 1$, множина $\langle T \cap D_i^0 \rangle$ є H - зрізом напівгрупи $S^<i$.

З означення 3.3. випливає, що $\langle T \rangle$ є H - зріз S .

Таким чином, $\langle T \rangle \cup \langle T^{-1} \rangle \cup E(IC_n)$ - трансверсалі фактормножини IC_n / H .

Очевидно, що справедлива наступна рівність:

$$E(IC_N) \langle T \rangle = \langle T \rangle E(IC_n) \langle T \rangle = \langle T \rangle,$$

$$E(IC_N) < T^{-1} > = < T^{-1} > E(IC_n) < T > = < T^{-1} >. \quad (3.28)$$

Якщо $\varphi \in \text{Marb}(A_\lambda; A_\mu)$, то для зручності замість φ будемо використовувати запис φ_λ, μ . Візьмемо ненульові елементи $\varphi_\alpha, \beta \in \langle T \rangle, \varphi_\beta, \gamma \in \langle T^{-1} \rangle$.

Бієкцію φ_α, β і φ_β, γ однозначно представимо через базисні елементи з T і T^{-1} відповідно:

$$\varphi_{\alpha, \beta} = \varphi_{\alpha, \alpha+1} \varphi_{\alpha+2, \dots, \beta-1, \beta}, \varphi_{\beta, \gamma} = \varphi_{\beta, \beta-1} \varphi_{\beta-1, \beta-2, \dots, \gamma+1, \gamma}. \quad (3.29)$$

Якщо $\alpha = \gamma$, то $\varphi_{\alpha, \beta} \varphi_{\beta, \gamma} = iA\gamma \in E(IC_n)$. Якщо $\alpha < \gamma$, то $\varphi_{\alpha, \beta} \varphi_{\beta, \gamma} = \varphi_{\alpha, \alpha+1} \varphi_{\alpha+2, \dots, \gamma-1, \gamma} \in \langle T \rangle$.

У разі, коли $\gamma < \alpha$, отримуємо $\varphi_{\alpha, \beta} \varphi_{\beta, \gamma} = \varphi_{\alpha, \alpha-1} \varphi_{\alpha-1, \alpha-2, \dots, \gamma+1, \gamma} \in \langle T^{-1} \rangle$.
Отже,

$$\langle T \rangle \langle T^{-1} \rangle \subseteq \langle T \rangle \cup \langle T^{-1} \rangle \cup E(IC_n). \quad (3.30)$$

Ясно, що $\langle T^{-1} \rangle \langle T \rangle$ також міститься в $\langle T^{-1} \rangle \cup \langle T \rangle \cup E(IC_n)$. Отже,
 $\langle T \rangle \cup \langle T^{-1} \rangle = \langle T \rangle \langle T^{-1} \rangle \cup \langle T \rangle \cup E(IC_n)$.

Нехай тепер A – довільний H - зріз напівгрупи IC_n , такий що $A = \langle Y \rangle$.

Якщо знайдеться трансверсаль T сімейства P , для якої $T \cup T^{-1} \subseteq Y$, то
 $A = \langle T \cup T^{-1} \rangle$.

Якщо ж $T \cup T^{-1} \not\subseteq Y$ для будь-якої трансверсалі T сімейства P , то
множина $\langle Y \rangle$ не буде трансверсаллю фактормножини IC_n / H , отже, H - \notin
зрізом IC_n .

Теорема доведена.

Зрозуміло, що кожний H - зріз напівгрупи I_n є H - зрізом IC_n , однак, на
відміну від ситуації з I_n , не кожний H - зріз напівгрупи IC_n , $n > 3$, є
напівгрупою всіх елементів, що зберігають деякий лінійний порядок на даній
 n -елементній множині.

Дійсно, нехай $X = \{1, 2, 3, 4\}$ і $T = \{\varphi, \psi, \eta\}$, де

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \psi = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \eta = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

Візьмемо такий H -зріз A напівгрупи IC_n , що $\langle T \rangle \cup \langle T^{-1} \rangle \subseteq A$. Зріз A
не збігається з напівгрупою.

$$H(\leq) = \{\varphi \in \text{In} \mid x \leq y \text{ тягне } x\varphi \leq y\varphi \text{ для всіх } x, y \in \text{dom}(\varphi)\} \quad (3.32)$$

при будь-якому лінійному порядку \leq на множині X .

Теорема 3.6. Число всіх різних H - зрізів симетричної інверсної 0-категорії IC_n , $n \geq 3$, так само

$$\prod_{i=2}^{n-1} i! C_n^{i-1} \frac{C_n^i!}{2}. \quad (3.33)$$

Доведення. Зрозуміло, що на піднапівгрупі D_i^0 з IC_n існує єдиний H - зріз $T = D_i^0$, а на D_i^0 - один H - зріз $\{i_X, 0\}$.

Нехай $\text{Mapb}(A_j; A_j + 1) \in P_i$, де $2 \leq i \leq n-1$, $i \mid m = C_i^n$. Оскільки $|P_i| = M^{-1}$ для всіх $i \in \{2, 3, \dots, n-1\}$, а $|\text{Mapb}(A_j; A_j + 1)| = I!$ при будь-якому j , такому що $1 \leq j \leq m-1$, то вибрати трансверсалі T сімейства P_i можна $i!^{m-1}$ способами.

У кожному з цих випадків множина T^{-1} і елементи, які породжуються об'єднанням $T \cup T^{-1}$, визначаються однозначно.

Крім того, будь-яке сімейство P_i , $2 \leq i \leq n-1$, може бути вибрано $m!$ різними способами, при цьому сімейства:

$$P_\lambda = \{\text{Mapb}(A_j; A_j + 1) \mid 1 \leq j \leq m-1\}, P^*\lambda = \{\text{Mapb}(A_j; A_j-1) \mid 2 \leq j \leq m\} \quad (3.34)$$

і тільки вони визначають рівні множини H - зрізів напівгрупи D_i^0 при будь-якому $\lambda \in \{2, 3, \dots, n-1\}$.

$$\text{Отже, число всіх } H \text{ - зрізів } D_i^0 - \frac{i!^{m-1} m!}{2}.$$

З означень 3.1 і 3.3 випливає, що всього H - зрізів на напівгрупі IC_n буде $\prod_{i=2}^{n-1} i! C_n^{i-1} \frac{C_n^i!}{2}$

Теорема доведена.

3.4. Класифікація зрізів з точністю до ізоморфізму

Нехай S^0 - півгрупа з нулем 0, $e \in E(S^0)$. Позначимо через $C(e)$ ($C^*(E)$) множину всіх таких елементів x з S^0 , що $xe \neq 0$ ($ex \neq 0$).

Теорема 3.6. Нехай T_1 і T_2 - довільні R -зрізи (L - зрізи) напівгрупи IC_X , а P_1 і P_2 - найбільші ортогональні декомпозиції T_1 і T_2 відповідно.

Впливають наступні еквівалентні умови:

(I) напівгрупи T_1 і T_2 ізоморфні;

(II) існує така бієкція $\varphi: E(T_1) \rightarrow E(T_2)$, що для кожного $e \in E(T_1)$ виконується $|C(e)| = |C(e\varphi)|$ (Відповідно $|C^*(E)| = |C^*(E\varphi)|$);

(III) існує така бієкція $\psi: P_1 \rightarrow P_2$, що для всіх $S \in P_1$ напівгрупи S і $S\psi$ ізоморфні.

Доведення. (I) \Rightarrow (II). Нехай $T_1 \cong T_2$, f – довільний ізоморфізм цих R -зрізів і $\varphi = f|E(T_1)$.

Припустимо, що для будь-якої бієкції $\eta: E(T_1) \rightarrow E(T_2)$ існує такий ідемпотент $a \in E(T_1)$, що $|C(a)| \neq |C(a\eta)|$. Тоді для обмеження φ виконується $|C(e)| \neq |C(e\varphi)|$ при деякому $e \in E(T_1)$.

Для визначеності покладемо $|C(e)| > |C(e\varphi)|$. Так як $xe \neq 0$ для всіх $x \in C(e)$, то $(xe)f = (xf)(e\varphi) \neq 0$, звідки $xf \in C(e\varphi)$.

Таким чином, $C(e)f \subseteq C(e\varphi)$, і отже $|C(e)| \leq |C(e\varphi)|$.

Аналогічним чином виключається припущення про те, що $|C(e)| < |C(e\varphi)|$.

Отже, вихідне припущення невірне і умова (II) доведена.

(II) \Rightarrow (III). Для всіх $\alpha \in E'(T_1)$ і $\beta \in E'(T_2)$ покладемо $C^0(\alpha) = C(\alpha) \cup \{0\}$ і $C^0(\beta) = C(\beta) \cup \{0\}$. Ясно, що справедливий такий вираз:

$$T_1 = \sum_{\alpha \in E'(T_1)} C^0(\alpha) \text{ и } T_2 = \sum_{\beta \in E'(T_2)} C^0(\beta), \quad (3.35)$$

які є найбільшими ортогональними сумами.

Для кожного $\alpha \in E'(T_1)$ позначимо через f_α довільну бієкцію $C^0(\alpha) \rightarrow C^0(\alpha\varphi)$, для якої $0f_\alpha = 0\varphi$. При будь-яких $x, y \in C^0(\alpha)$, таких що $xy \neq 0$, справедливо:

$$(xy)f_\alpha = xf_\alpha = xf_y = xf_y f_y = xf_\alpha f_\alpha. \quad (3.36)$$

Якщо ж $xy = 0$, то, очевидно, $(xy)f_\alpha = 0f_\alpha = 0 = xf_\alpha f_\alpha$. Таким чином, для бієкції $\varphi|E'(T_1)$ має місце $C^0(\alpha) \cong C^0(\alpha\varphi)$ при будь-якому $\alpha \in E'(T_1)$.

(III) \Rightarrow (I). Припустимо, що існує бієкція $\varphi: E'(T_1) \rightarrow E'(T_2)$, така що $C^0(\alpha) \cong C^0(\alpha\varphi)$ щодо $\xi\alpha$ для всіх $\alpha \in E'(T_1)$.

Позначимо через $\xi: T_1 \rightarrow T_2$ відображення, яке визначається ізоморфізмами $\xi\alpha, \alpha \in E'(T_1)$. Очевидно, що ξ є ізоморфізм.

Теорема доведена.

Для J - зрізів напівгрупи IC_X має місце наступна теорема:

Теорема 3.7. Нехай T_1 і T_2 - довільні J зрізи напівгрупи IC_X . Еквівалентні наступні умови:

- (I) напівгрупи T_1 і T_2 ізоморфні;
- (II) існує бієкція $E(T_1) \rightarrow E(T_2)$;
- (III) існує бієкція $Nil(T_1) \rightarrow Nil(T_2)$.

Доведення. З огляду на будову довільного J зрізу, легко отримати необхідний.

Нехай J - деяка множина і $S = (J \times J) \cup \{0\}$. Для всіх $(a; b), (c; d) \in S$ покладемо

$$(a; b)(c; d) = \begin{cases} (a; b), & \text{якщо } b = c \\ 0, & \text{якщо } b \neq c \end{cases}. \quad (3.37)$$

$$0 \cdot (a; b) = (a; b) \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0. \quad (3.38)$$

Множина S щодо такої операції є напівгрупою, яка називається *напівгрупою $J \times J$ -матричних одиниць*.

Нарешті, для H - зрізів IC_X справедлива наступна теорема.

Теорема 3.8. Будь-які два H зрізи напівгрупи IC_X ізоморфні. Більш того, кожний H - зріз IC_X ізоморфно вкладається в напівгрупу $U(X) \times U(X)$ - матричних одиниць.

Доведення. Нехай T_1 і T_2 - довільні H зрізи напівгрупи IC_X . Ізоморфізм цих зрізів задає наступне відображення:

$$T_1 \rightarrow T_2: \varphi_1 \rightarrow \varphi_2, \text{ якщо } (\varphi_1; \varphi_2) \in H. \quad (3.39)$$

Позначимо через S напівгрупу $U(X) \times U(X)$ - матричних одиниць, а через S' таку її піднапівгрупу, що:

$$S' = (\cup_{i \in I} U_i(X) X U_i(X) \cup \{0\}). \quad (3.40)$$

Для довільного H зрізу T напівгрупи IC_X визначимо відображення:

$$\xi: T \rightarrow S, \varphi \rightarrow (\text{dom}(\varphi); \text{im}(\varphi)), \text{ якщо } \varphi \neq 0 \quad (3.41)$$

і $\xi(\varphi) = 0$, якщо $\varphi = 0$.

Зрозуміло, що ξ - мономорфізм, при цьому $\xi(T) = S'$.

Теорема доведена.

Легко перевірити, що справедливо наступне визначення.

Означення 3.4. Мають місце наступні твердження:

$$(I) |E(IC_n)| = 2^n;$$

$$(II) |Nil(IC_n)| = \sum_{i=1}^n \left((C_n^i)^2 - C_n^i \right) i! + 1;$$

$$(III) \text{ для будь-якого R-зрізу } T \text{ напівгрупи } IC_n \text{ виконується } |T| = 2^n;$$

$$(IV) \text{ для будь-якого J зрізу } T \text{ напівгрупи } IC_n \text{ виконується } |T| = N + 1;$$

$$(V) \text{ для будь-якого H зрізу } T \text{ напівгрупи } IC_n \text{ виконується}$$

$$|T| = \sum_{i=0}^n (C_n^i)^2; \quad (3.42)$$

(VI) для будь-якого R-зрізу (J зрізу) T напівгрупи IC_X , $|X| > 1$, існує єдина породжуюча множина $T \setminus \{0\}$;

(VII) для будь-якого H зрізу IC_n існує $\prod_{i=2}^{n-1} i! C_n^{i-1} \frac{C_n^i}{2}$ породжуючих множин;

(VIII) кожний R-зріз (J - зріз) напівгрупи IC_X ізоморфно вкладається в напівгрупу $U(X) \times U(X)$ - матричних одиниць.

ВИСНОВКИ

Таким чином, теорія категорій є спробою математиків розкрити фундаментальні принципи, загальні для різних областей математики. Грубо кажучи, категорія являє собою клас однотипних математичних структур, груп, лінійних просторів, топологічних просторів і т.д. і співвідношення між ними.

Багато важливих математичних конструкцій, що зустрічаються в різних областях математики (наприклад, поняття лінійних або топологічних просторів), отримують в термінах теорії категорій однаковий і витончений вираз.

Категорії - це деякі математичні структури, окремими випадками яких є частково впорядковані множини, а також напівгрупи з одиницею (в тому числі групи).

Роль зображень напівгруп і квазіупорядкованих напівгруп напівгрупами перетворень та напівгрупами бінарних відношень природно вмотивовує пошуки аналогічних зображень часткових групоїдів, серед яких найважливішими є групоїди категорного типу. Напівгрупи часткових перетворень в їх чистому вигляді для побудови відповідних зображень виявляються не пристосованими. Природньою в цьому напрямку є задача описання зображень 0-категорійних напівгруп підходящими піднапівгрупами так званої симетричної 0-категорії, яка разом з нулем утворює напівгрупу й потребує подальшого вивчення її структурних властивостей.

Міць теорії категорій можна поставити «на конвеєр» і використовувати в рутинних обчисленнях. Кілька років тому Боб Коука з колегами на основі теорії категорій розробив простий «формалізм», який замінює собою формульні обчислення в квантовій теорії інформації.

В результаті написання роботи були виконані наступні задачі:

1. Розглянуто загальну характеристику категорій;
2. Розглянуто напівретракції деяких алгебраїчних систем;

3. Дано визначення поняттю «0-категорії» та розглянуто властивості симетричних 0-категорій;

4. Розглянуто зрізи відношень Гріна на симетричній інверсній 0-категорії.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. L. E.Renner, Analogue of the Bruhat decomposition for algebraic monoids. II: The length function and the trichotomy, J. Algebra, 175, No. 2 (1995), 697_714.
2. D. F.Cowan, N.R.Reilly, Partial cross-sections of symmetric inverse semigroups, Int. J. Algebra Comput., 5, No. 3 (1995), 259_287.
3. O.Ganyushkin, V.Mazorchuk, L- and R-cross-sections in IS_n , Commun. Algebra, 31, No. 9 (2003), 4507_4523.
4. V.Pyekhtyeryev, H -, R- and L-cross-sections of the infinite symmetric inverse semigroup IS_X , Algebra Discrete Math., 2005, No. 1, 92_104.
5. V.Pyekhtyeryev, H - and R-cross-sections of the full finite semigroup T_n , Algebra Discrete Math., 2003, No. 3, 82_88.
6. G.Kudryavtseva, V.Maltsev, V.Mazorchuk, L- and R-cross-sections in the Brauer semigroup, U.U.D.M. Report 2004:43, Place Type Univ., 2004.
7. Ю. В.Жучок, Трансверсалі відношень Гріна ортогональної суми напівгруп, Вісник Донецького ун-ту. Сер. А. Природничі науки, 2007, № 2 , 7_11.
8. Y.Kochubinska, On cross-sections of partial wreath product of inverse semigroups, in: P. Hlineny (ed.) et al., 6th Czech-Slovak international symposium on combinatorics, graph theory, algorithms and applications, DIMATIA Center, Charles Univ. (Prague, Czech Republic, July 10–16, 2006), Amsterdam, Elsevier, Electr. Notes Discrete Math., 28 (2007), 379_386.
9. Ю. В.Жучок, Декомпозиції напівгруп з нулем, Вісник Донецького ун-ту. Сер. А. Природничі науки, 2005, № 2, 7_13.
10. Ю. В.Жучок, Група автоморфізмів симетричної інверсної 0-категорії, Вісник Донецького ун-ту. Сер. А. Природничі науки, 2008, № 2, 57_61.
11. A.Vernitski, A generalization of symmetric inverse semigroups, Semigroup Forum, 75, No 2 (2007), 417_426.

12. G.Kudryavtseva, V.Maltcev, Two generalizations of the symmetric inverse semigroups, vers. 2, 2008, <http://arxiv.org/abs/math/0602623>.
13. Л.Н.Шеврин, Полугруппы, в кн.: В. А. Артамонов, В.Н.Салий, Л. А.Скорняков и др., под общ. ред. Л. А.Скорнякова, Общая алгебра, т. 2, гл. IV, М., Наука, 1991, 11_191.
14. W.D.Munn, Brandt congruences on inverse semigroups, Proc. Lond. Math. Soc., III. Ser., 14 (1964), 154_164.
15. Усенко В. М. Напівретракції моноїдів [текст] / Усенко В. М. // Труды ИПММ. 2000. Т. 5. С. 155164.
16. Усенко В. М. О полуретрациях групп [текст] / Усенко В. М. // Вопросы алгебры. Изд-во Гомельс. ун-та. 1997. Т. 11. С. 151169.
17. Gerhardt J. A. Free bands and free $*$ -bands [text] / Gerhardt J. A., Petrich M. // Glasgow Math J. 1986. 28. P. 161179.
18. Gerhardt J. A. Certain characterizations of varieties of bands [text] / Gerhardt J. A., Petrich M. // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1988. 31. P. 301319.
19. Gerhardt J. A. Varieties of bands revisited [text] / Gerhardt J. A., Petrich M. // Proc. London Math. Soc. 1989. 58 (3). P. 323350.
20. Petrich M. Relatively free bands [text] / Petrich M., Silva P. V. // Comm. in Algebra. 2000. 28 (5). P. 26152631.
21. Petrich M. Structure of relatively free bands [text] / Petrich M., Silva P. V. // Commun. Algebra. 2002. 30, № 9. P. 41654187.
22. Жучок А. В. Напівретракції дімоноїдів [текст] / Жучок А. В. // Труды ИПММ. 2008. Вып. 17. С. 4250.
23. Arbib M. A., Manes E. G. Arrows, Structures and Functors, New York: Academic Press.
24. Голдблатт Р. Топосы. Категорный анализ логики. М.: Мир, 1983.
25. Мак Лейн С. Категории для работающего математика. — М.: Физматлит, 2004.
26. Kondratiev G.V., Categories. Beginning Course (in Russian) 2008, (<http://ru.arxiv.org/abs/0811.0318v1>).

27. Цаленко М. Ш. Основы теории категорий. М.: Наука, 1974.
28. Букур И. Деляну А., Введение в теорию категорий и функторов.
29. Manes E. G. Algebraic Theories, Graduate texts in mathematics № 26. New York, Springer.
30. Кострикин А. И., Манин Ю. И. Линейная алгебра и геометрия. М.: Наука, 1986.
31. Ленг С., Алгебра. 4. Фейс К., Алгебра. Кольца, модули и категории. Т 1.
32. Голубцов П. В. Информативность в категории многозначных преобразователей информации, Проблемы передачи информации, 1998, т. 34, №3, 60-80
33. Petrich M. Relatively free bands [text] / Petrich M., Silva P. V. // Comm. in Algebra. 2005. – 128 P.
34. Жучок Ю. В. Сечения отношений Грина на симметрической инверсной 0-категории / Ю. В. Жучок // Алгебра и логика. – 2012. – Т. 51, №4. – С. 458 – 475.